Resumen

Clasificación de errores en mediciones: sistemáticos y casuales

Presentación de errores: x.xxx ± δx

- δx con una cifra significativa (salvo 1)
- errores relativos

Graficando valores medidos

- Una variable: sobre un eje, histograma
- Dos variables: buscando una relación lineal si existe de manera simple

Combinando errores: caso general

Z = x ± y

$Z = (x_m \pm y_m) \pm (\delta x + \delta y]$

$$z = \frac{a.b.c}{d.e.f}$$

$$\frac{\delta z}{z} = \frac{\delta a}{a_m} + \frac{\delta b}{b_m} + \frac{\delta c}{c_m} + \frac{\delta d}{d_m} + \frac{\delta e}{e_m} + \frac{\delta f}{f_m}$$

Resumen

Combinando errores: caso de variables independientes

$$Z = Z(w_m, x_m, y_m)$$

$$\delta z = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial w}\right|_{w_m, x_m, y_m} .\delta w\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{w_m, x_m, y_m} .\delta x\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{w_m, x_m, y_m} .\delta y\right)^2}$$

Permite el análisis de qué instrumento conviene utilizar para medir cada variable

Tratamiento de las mediciones: n mediciones $\{x_i\}$ de la variable x

- **Calificadores: promedio, varianza, desvío estándar**
- **Dispersión típica de una medición: $x_i \pm \sigma$**
- **Valor a informar:**

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - nX^2\right)}$$

$$X \pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

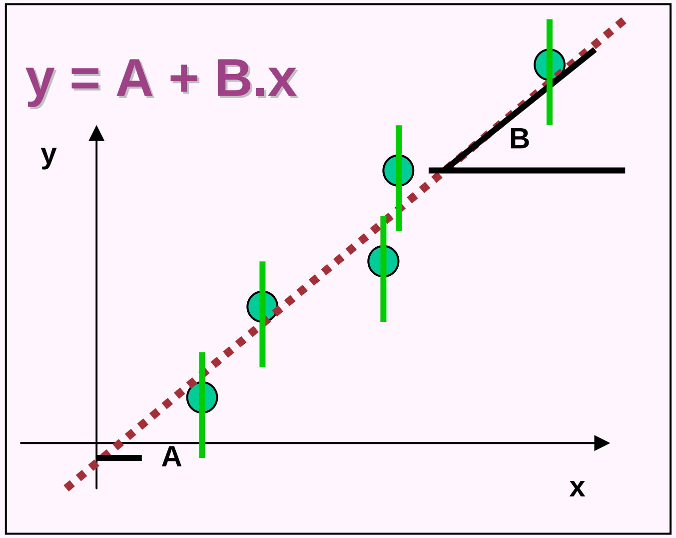
Ajustes de resultados

El caso de ajustes de puntos que están sobre una recta

Medimos n pares (x_i,y_i) y tratamos de encontrar A,B que mejor "ajuste" la expresión y = A + B.x

Suposiciones:

- **el error en x es mucho menor que el de y**
- **los errores en y son similares**



Definimos $\delta y_i = y_i - A - B.x_i$

Buscamos A,B que minimicen la suma cuadrática de las distancias de los puntos a la recta de ajuste

$$mínimo \sum_{i=1}^{n} (\delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - A - B.x_i)^2$$

Ajustes de resultados: ajuste de una recta

$$mínimo \sum_{i=1}^{n} (\delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - A - B.x_i)^2$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (\delta y_i)^2}{\partial A} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - A - B.x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - n.A - B \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$n.Y - n.A - n.B.X = 0$$

$$Y - A - BX = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (\delta y_i)^2}{\partial B} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i.(y_i - A - B.x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i - A \sum_{i=1}^{n} x_i - B \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i - n.A.X - B \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i . \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)}{\Delta}$$

$$B = \frac{n \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i . \sum_{i=1}^{n} y_i}{\Delta}$$

$$\Delta = n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2$$

Ajustes de resultados: ajuste de una recta

$$A=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i.\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\sum_{i=1}^{n} x_i\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)}{\Delta}$$

$$B=\frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)-\sum_{i=1}^{n} x_i.\sum_{i=1}^{n} y_i}{\Delta}$$

$$\Delta=n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

Incertezas en A, B:

$$\sigma_A=\sigma_y\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\Delta}}$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-A-B.x_i)^2}$$

$$\sigma_B=\sigma_y\sqrt{\frac{n}{\Delta}}$$

Ajustes de resultados

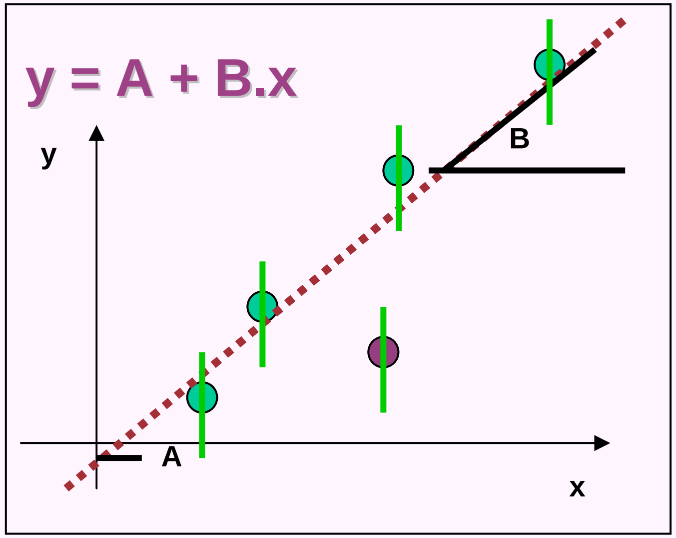
El caso de ajustes de puntos que están sobre una recta

Consideraciones:

- **A,B obtenidos deben tener sentido físico**
- **la recta debe ajustar todos los puntos considerados dentro del margen de error**
- **para identificar si los puntos medidos responden a un comportamiento lineal definimos:**

r: coeficiente de correlación

σ_{xy}: covarianza



$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_y}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta x_i . \delta y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - X).(y_i - Y)$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta x_i . \delta y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta x_i^{\,2} \sum_{i=1}^{n} \delta y_i^{\,2}}}$$

Ajustes de resultados

Coeficiente de correlación: significado

Supongamos que x,y están perfectamente sobre una recta, entonces dado x_i se obtendría $y_i = A + B.x_i$.

Además: Y = A + BX

$\delta y_i = y_i - Y = (A + B.x_i) - (A + B.X) = B.\delta x_i$

reemplazando:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta x_i . \delta y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta x_i{}^2 \sum_{i=1}^{n} \delta y_i{}^2}} = \frac{B \sum_{i=1}^{n} \delta x_i{}^2}{\sqrt{B^2 \sum_{i=1}^{n} \delta x_i{}^2 \sum_{i=1}^{n} \delta x_i{}^2}} = \frac{B}{|B|} = \pm 1$$

Nociones de probabilidad

- Sea un experimento que puede dar como resultado valores discretos de una variable <u>x</u> (dado, ruleta, spin, nro. de neutrones en el núcleo, etc.). Cada uno de los valores posibles tiene una probabilidad P_i de ser observado, de manera que cumple:

$0 \leq P_i \leq 1$ $\quad\quad\quad$ $\Sigma_i P_i = 1$

(sumado en todos los posibles valores de x_i)

- Sea un experimento que puede dar como resultado valores continuos de una variable <u>x</u> (I, V, R, t, etc.). Existen infinitos valores posibles. Existe probabilidad que un valor ubicado en un entorno de una cantidad dada sea observable, de manera que cumple:

$\mathrm{Prob}(x,x+dx) = F(x).dx$ $\quad\quad\quad$ $0 \leq F(x)$ $\quad\quad\quad$ $\int F(x).dx = 1$

(integrado en todo el entorno de posibles valores de x)

Nociones de probabilidad: como calcularla

• **Para las variables discretas <u>x</u>, donde son posibles <u>k</u> valores diferentes: si realizamos un número <u>n</u> de mediciones y obtenemos n_i veces el valor x_i, definimos:**

$$P(x_i) = \frac{n_i}{n}$$

$$i = 1,....,k$$

$$0 \leq P(x_i) \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{k} P(x_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i = 1$$

$$X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} n_j x_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j}{n} x_j = \sum_{j=1}^{k} x_j . P(x_j)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta x_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - X)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} n_j (x_j - X)^2 = \sum_{j=1}^{k} P(x_j).(x_j - X)^2$$

Nociones de probabilidad: como calcularla

- **Para variables continuas x (I, V, R, t, etc.), si realizamos un número n de mediciones y obtenemos n_i veces un valor entre x_i y x_i+dx, definimos:**

$$F(x).dx = \frac{n_{(x,x+dx)}}{n}$$

$$n \to \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x).dx = \sum \frac{n_{(x,x+dx)}}{n} = \frac{1}{n}\sum n_{(x,x+dx)} = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} X &= \int_{-\infty}^{\infty} x.F(x).dx \\ \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - X)^2.F(x).dx \end{aligned}}$$

Los errores aleatorios en las mediciones

• Supongamos que la medición de una variable <u>x</u> (continua) se encuentra afectada por factores externos que no pueden predecirse, y que resultan aleatorios en sentido y magnitud,

• Imaginemos que graficamos la frecuencia de ocurrencia de distintos valores de x (histograma),

• A medida que el número <u>n</u> de mediciones realizadas se incrementa, es posible realizar una representación cada vez más “fina” de la distribución de la frecuencia en función de <u>x</u>, tendiendo el histograma a una curva continua: la distribución límite que corresponde al efecto que estamos analizando

• Para el caso de errores aleatorios variados pero pequeños, la función límite estará centrada en el valor de “medición” y será simétrica respecto a este valor

Función de distribución de Gauss

La función matemática que describe acertadamente este comportamiento es la función de distribución NORMAL o de GAUSS

$$G_{a,s}(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2s^2}$$

Propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_{a,s}(x).dx = 1$$

Valor medio

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} x.G_{a,s}(x).dx = a$$

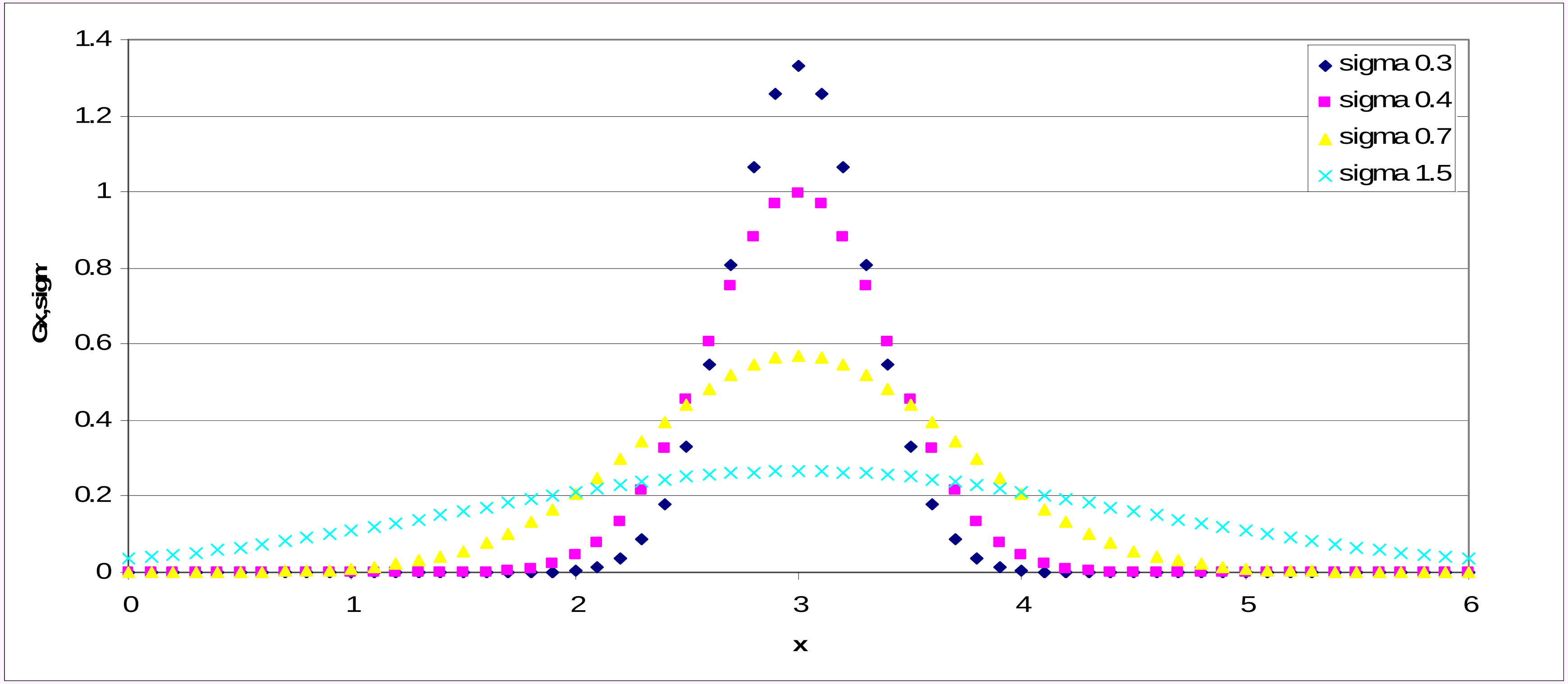
Desvío estándar

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-X)^2.G_{a,s}(x).dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2.G_{a,s}(x).dx = s^2$$

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}$$

Función de distribución de Gauss

Significado de σ



$$prob(X-\sigma, X+\sigma) = \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} G(x).dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}.dx = 0.68$$

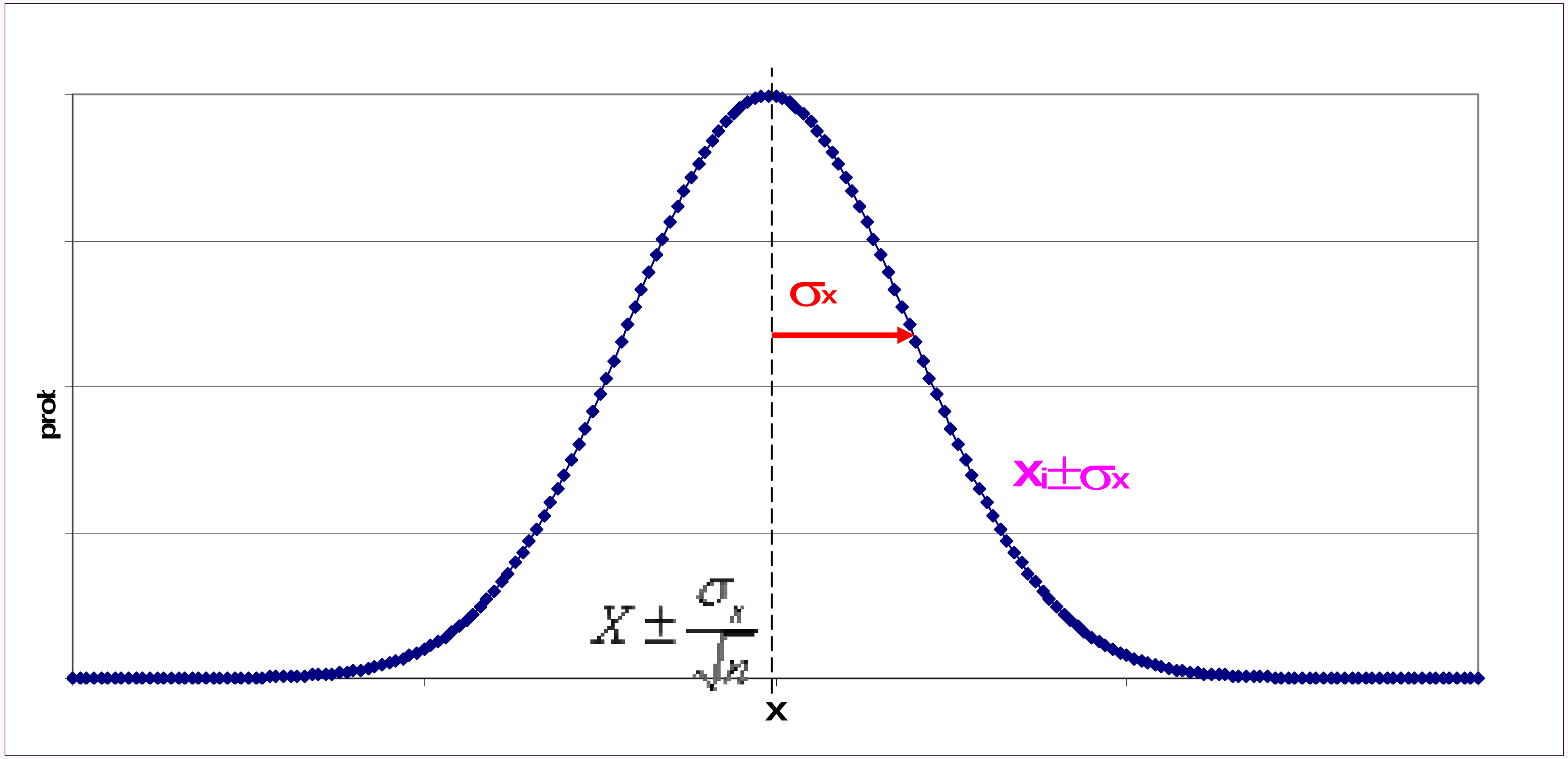
$$prob(X-2\sigma, X+2\sigma) = 0.954$$

$$prob(X-3\sigma, X+3\sigma) = 0.997$$

Función de distribución de Gauss

Encontrando X y σ cuando medimos $\{x_i\}$

X y σ son límites cuando n → ∞



$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - nX^2\right)}$$

$$X \pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$