Apunte 1:

El proceso de Medición

1. Introducción

Las mediciones y el procesamiento de errores no son una anécdota: están en el corazón de la física moderna.

La física transcurre como el diálogo entre la teoría y el experimento

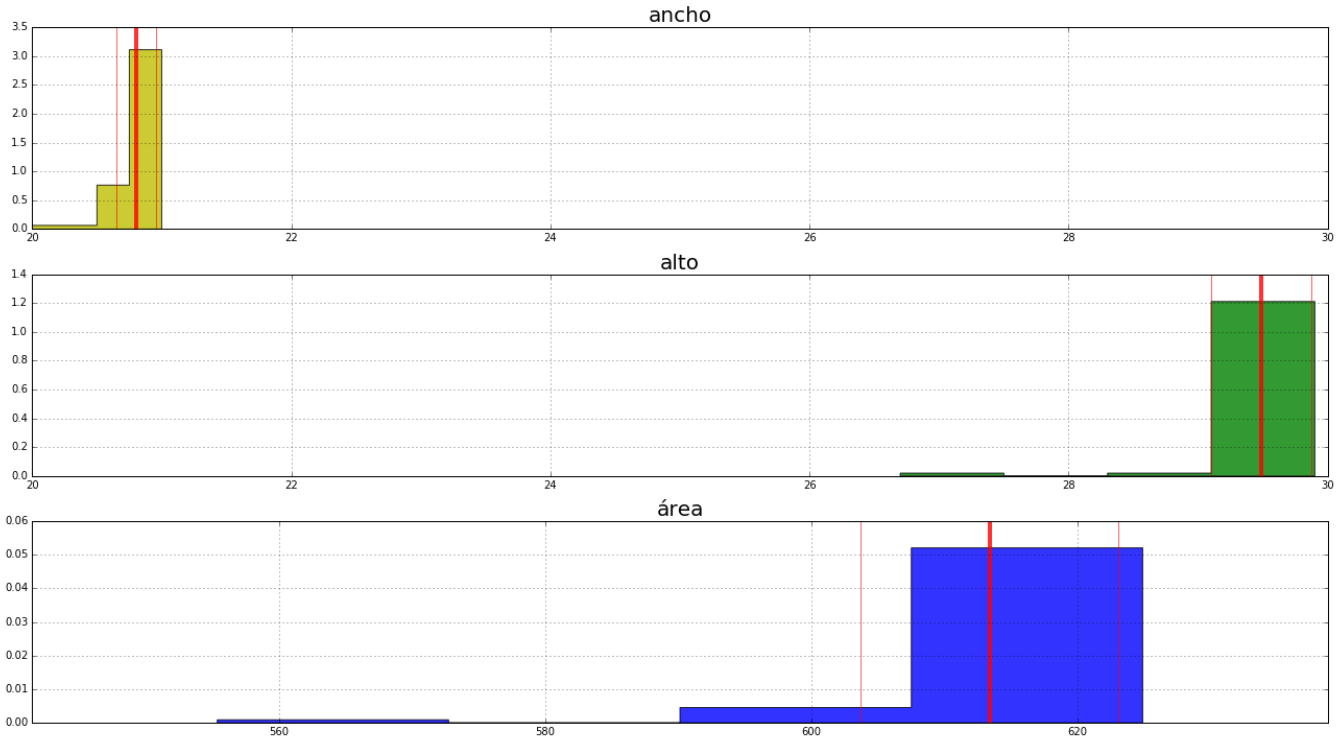
> *El núcleo del experimento es la medición*
> *El trauma del péndulo*

2. Medición de la hoja A4 con la regla de 13 (~cm)

Fuentes de errores:

> - ***Instrumento***
>   - *calibración*
>   - *variabilidad sistemática*
>   - *variabilidad aleatoria*
> - ***Método***
>   *(descripción detallada de la secuencia de medición: mejoras en los detalles)*
> - ***Modelo** de la magnitud que quiero medir*
>   *(la hoja es un rectángulo)*

3. Primer Histograma



Vemos que hay unos puntos demasiado chicos. Los analizamos y encontramos que son errores de interpretación de los números o de tipeo.

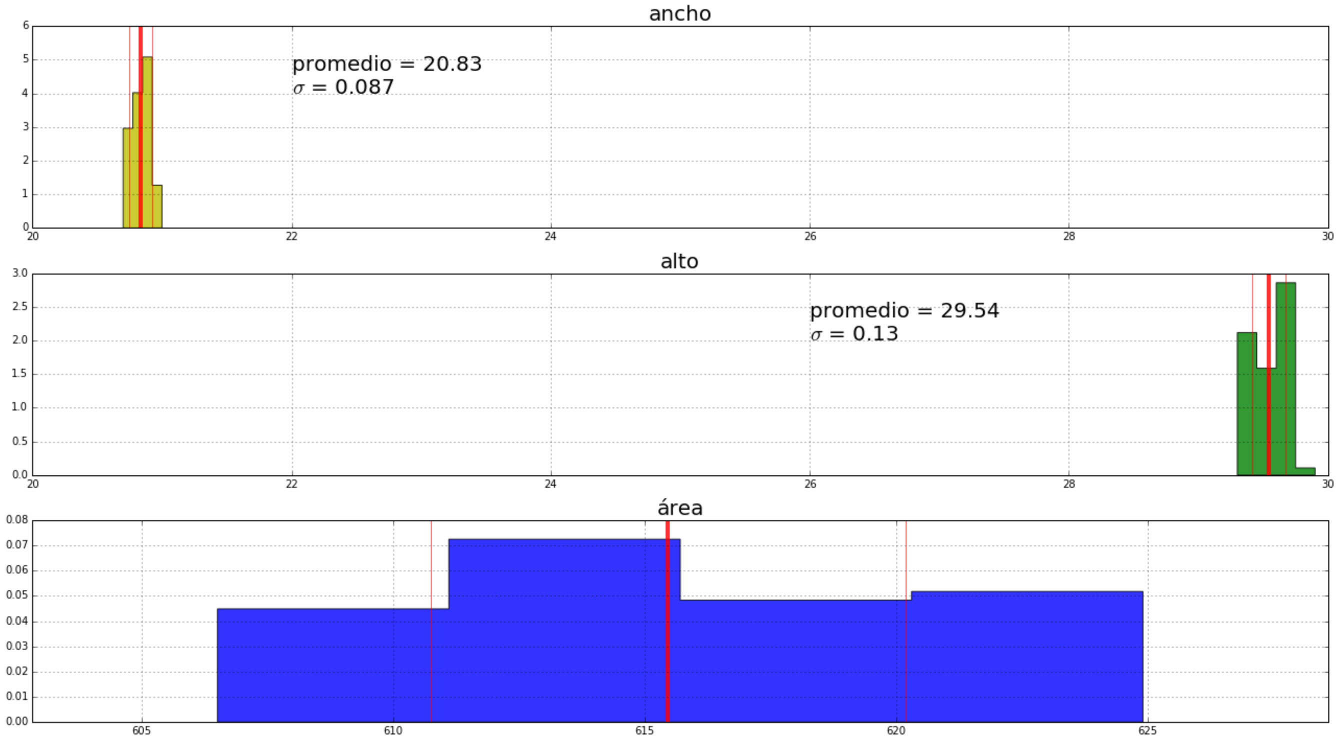
$$20.0 \rightarrow 20.9$$

$$20.3 \rightarrow 20.9$$

$$20.5 \rightarrow 20.8$$

$$26.7 \rightarrow 29.7$$

Ahí nos quedan unos histogramas más sanitos y lindos de ver:



El resultado de la medición es una distribución. Habitualmente es campanuda, simétrica y gaussiana.

4. Descriptores Estadísticos

- **Datos**

$$\{x_i\}_N$$

- **Localización:** Promedio
  Centro de masa, ventajas y desventajas

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$$

- **Escala:** varianza
  Energía elástica -> mínimo en el promedio

$$V = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

- **Desviación estándar**

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i (x_i - \overline{x})^2}$$

- **error relativo**
  Suele escribirse %

$$\epsilon = \frac{\sigma}{\overline{x}}$$

5. Combinación lineal de mediciones *independientes*

Dadas dos mediciones
dos mediciones, una variable z dependiente

$$\{x_i\}_N \qquad \{y_i\}_N \qquad z_i = ax_i + by_i + c$$

Localización:

$$\overline{z} = \frac{1}{N}\sum_i (ax_i + by_i + c) = a\overline{x} + b\overline{y} + c$$

Escala:

$$\begin{aligned}
\sigma_z^2 &= \frac{1}{N}\sum_i (z_i - \overline{z})^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_i (ax_i + by_i - a\overline{x} + b\overline{y})^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_i [a(x_i - \overline{x}) + b(y_i - \overline{y})]^2 \\
&= \frac{a^2}{N}\sum_i (x_i - \overline{x})^2 + \frac{b^2}{N}\sum_i (y_i - \overline{y})^2 + \frac{2ab}{N}\sum_i (x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y}) \\
&= a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2
\end{aligned}$$

En esta cuenta hicimos que el término de los productos cruzados se anule:

$$\mathrm{Cov}(x, y) = \frac{1}{N}\sum_i (x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y}) = 0$$

A esta cantidad de la llama *covariancia*. La covariancia nula es casi la definición de variables independientes. En general las variables van a ser independientes cuando estén desconectadas casualmente. Es honesto aclarar que los términos *correlación*, *independencia* y *causalidad* son cosas diferentes y hay ríos de tinta escritos al respecto. El tema es interesante, pero llama a la confusión en este contexto y momento de la vida. Avanzamos obviando esos detalles.

Si las variables son independientes, entonces, la combinación lineal resulta:

$$\boxed{\sigma_z = \sqrt{a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2}}$$

Decimos que los errores se suman *cuadráticamente*.

6. Propagación de errores

Si tengo una variable z que depende de dos mediciones independientes de x, y de manera que

$$z \equiv z(x, y)$$

y las variaciones que provocan las dispersiones de x, y son en una región donde z puede ser aproximada linealmente, entonces resulta que

$$z(x, y) \approx z(\overline{x}, \overline{y}) + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)(x - \overline{x}) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)(y - \overline{y})$$

En este caso, podemos aprovechar el resultado anterior y deducir que:

$$\overline{z} = z(\overline{x}, \overline{y})$$

y que la dispersión es:

$$\boxed{\sigma_z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2}}$$

y esta es la fórmula insignia para propagar errores.

Está fórmula va a reventar como un sapo en varios casos:

- si hay correlaciones
- si hay una derivada cero
- si hay una discontinuidad en la función cerca del punto de medición

Para todo lo demás, estamos salvados.

7. Propagación mental de errores

En general no necesito ponerme a hacer derivadas para propagar errores en las fórmulas. El 90% de las fórmulas que aparecen en los experimentos que van a hacer son productos de potencias.

Si propagamos errores en una fórmula del tipo

$$z = \frac{x^n u^k}{y^m}$$

Dejo como ejercicio (yo lo hice en clase) demostrar que la fórmula de propagación resulta:

$$\epsilon_z^2 = n^2\ \epsilon_x^2 + k^2\ \epsilon_u^2 + m^2\ \epsilon_y^2$$

Es decir que los errores relativos se suman en cuadratura, pesados por la potencia en la que aparecen en la fórmula.

En general hay uno de esos errores que predomina en el experimento y nos dice en qué variable hay que poner el esfuerzo para mejorar el resultado.

8. Distribución predictiva y distribución del promedio

La distribución que venimos caracterizando es la de los datos.
Se la llama **distribución predictiva** porque predice la probabilidad de que el próximo dato que mida tenga un determinado valor.

Pero cuando comunico el resultado de una medición, me interesa comunicar el mejor valor que obtuve. Cuál va a ser la dispersión del valor medio, si mido todo de nuevo?

Es decir que me interesa hacer propagación en la expresión:

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$$

Hacemos la propagación y resulta que:

$$\sigma_{\overline{x}}^2 = \sum_j \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_j} \right)^2 \sigma_{xj}^2$$

Está claro que la derivada parcial vale $1/N$, ya que cada término de la expresión del promedio es cero si $i \neq j$.

Pero cuál es la dispersión de x_j? Parece bastante intuitivo que es igual a la dispersión de los mismos datos x_i. Si nos ponemos excesivamente formalistas, resulta que en realidad es la dispersión de los valores que obtendría del j-ésimo valor de x en una serie de experimentos alternativos. Esta idea de los experimentos pensados que nadie realizará en mundos paralelos es una de las necesidades teóricas más desagradables de la estadística tradicional. Vamos a trabajar más adelante para abandonar estas supercherías.

Más desahogados, seguimos con la cuenta:

$$\begin{aligned} \sigma_{\overline{x}}^2 &= \sum_j \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_j} \right)^2 \sigma_{xj}^2 \\ &= \sum_j \frac{1}{N^2} \sigma_x^2 \\ &= \frac{N}{N^2} \sigma_x^2 \end{aligned}$$

Con lo que llegamos a la famosa fórmula del **error del promedio :**

$$\boxed{\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}}$$

9. Expresión de los resultados - Cifras significativas

Cuando terminamos el análisis de datos, vamos a expresar el resultado final como:

$$\text{El valor obtenido es :} \;\; (\overline{x} \pm \sigma_{\overline{x}})$$

Donde comunicamos el promedio y el *error del promedio*.

Es importante saber que del error sólo interesa el orden de magnitud, de manera que la regla para expresar el resultado es:

- Si la primer cifra significativa es diferente de 1, escribo el valor de σ sólo con esa cifra
- Si la primer cifra significativa es 1, agrego un decimal más, porque si no tengo muy mal definido el orden de magnitud.

La regla para expresar el promedio es:

- Coloco decimales hasta la última cifra significativa de la dispersión. Ni más ni menos.

Y con eso llegaremos al final del cuatrimestre sin provocar escenas innescesarias de violencia simbólica.

(Fin de la primera parte de las clases de errores. Willy 2017.)