

Física Experimental / Laboratorio I

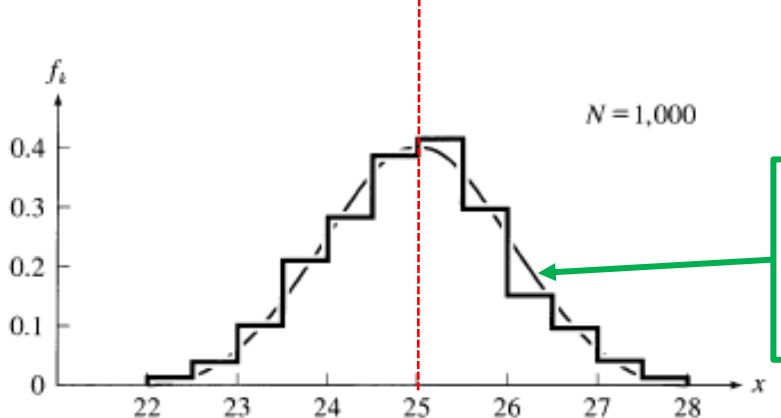
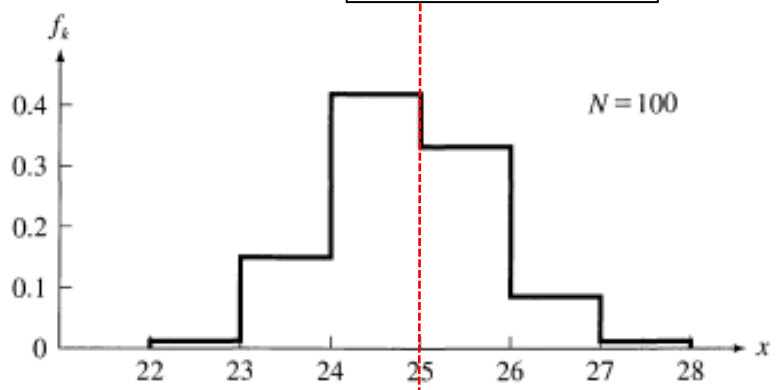
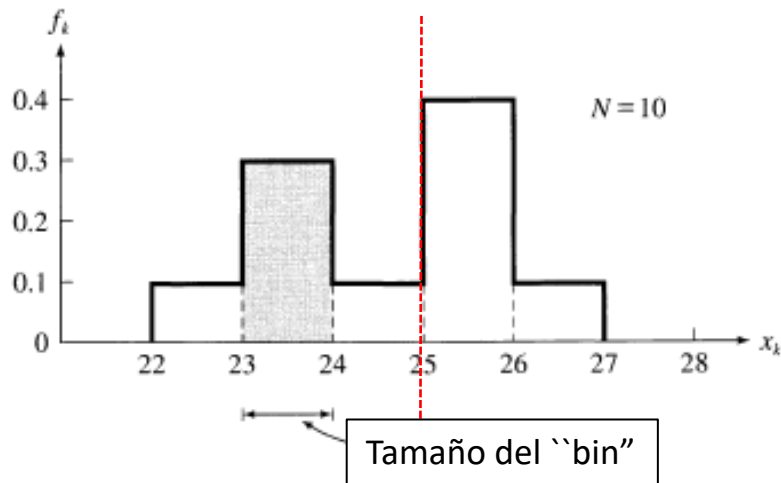
Clase #3

Física Experimental / Laboratorio I

Pero antes lo esencial de la #2

Distribución Gaussiana de datos aleatorios:

$$G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}$$



σ como límite de confianza del 68%

$\overline{x}$ y σ_x son los mejores estimadores de X y de σ

σ_x es aproximadamente independiente de N, refleja el proceso de medición

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

: decrece con N al definirse mejor la distribución

Tiende a una curva continua para $N \rightarrow$ infinito:
la distribución "normal" o de Gauss (*teorema central del límite*)

Propagación de errores: Reglas para funciones de varias variables

Si los errores son aleatorios y las variables son independientes:

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \delta x\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \delta z\right)^2}$$

Si $q = x + \dots + z - (u + \dots + w)$ Entonces: $\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + \dots + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + \dots + (\delta w)^2}$

Si $q = \frac{x \times \dots \times z}{u \times \dots \times w}$ Entonces: $\frac{\delta q}{|q|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{|x|}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta z}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{|u|}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta w}{|w|}\right)^2}$

Si $q(x) = x^n$, $\frac{\delta q}{|q|} = |n| \frac{\delta x}{|x|}$

Si $q = Bx$, $\delta q = |B| \delta x$

Cómo incluir los errores sistemáticos en la incerteza total

Finalmente, y aunque no tiene una demostración formal, si existieran incertezas sistemáticas cuya magnitud pueda determinarse, se puede utilizar argumentos de razonabilidad para concluir que

$$\delta x_{tot} = \sqrt{(\delta x_{ale})^2 + (\delta x_{sis})^2}$$

Y ante la duda,

$$\delta x_{tot} \leq |\delta x_{ale}| + |\delta x_{sis}|$$

Atracción gravitatoria: test de modelos

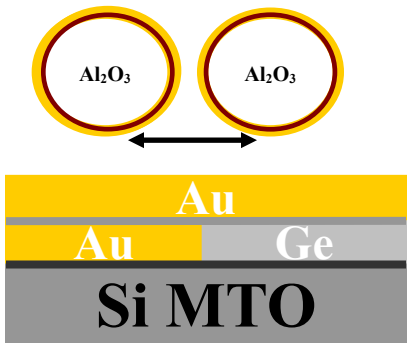
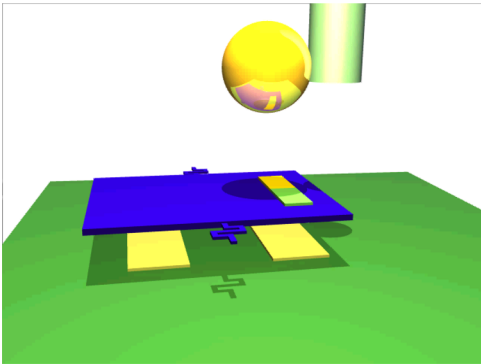
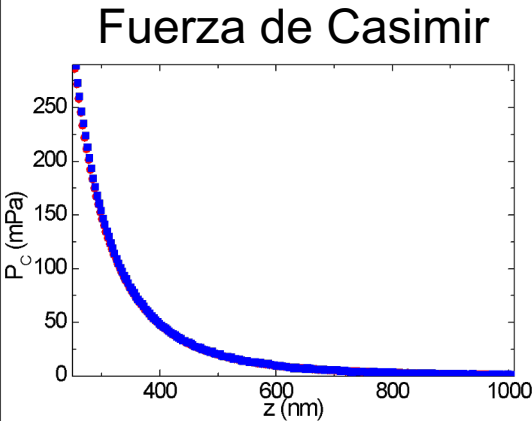
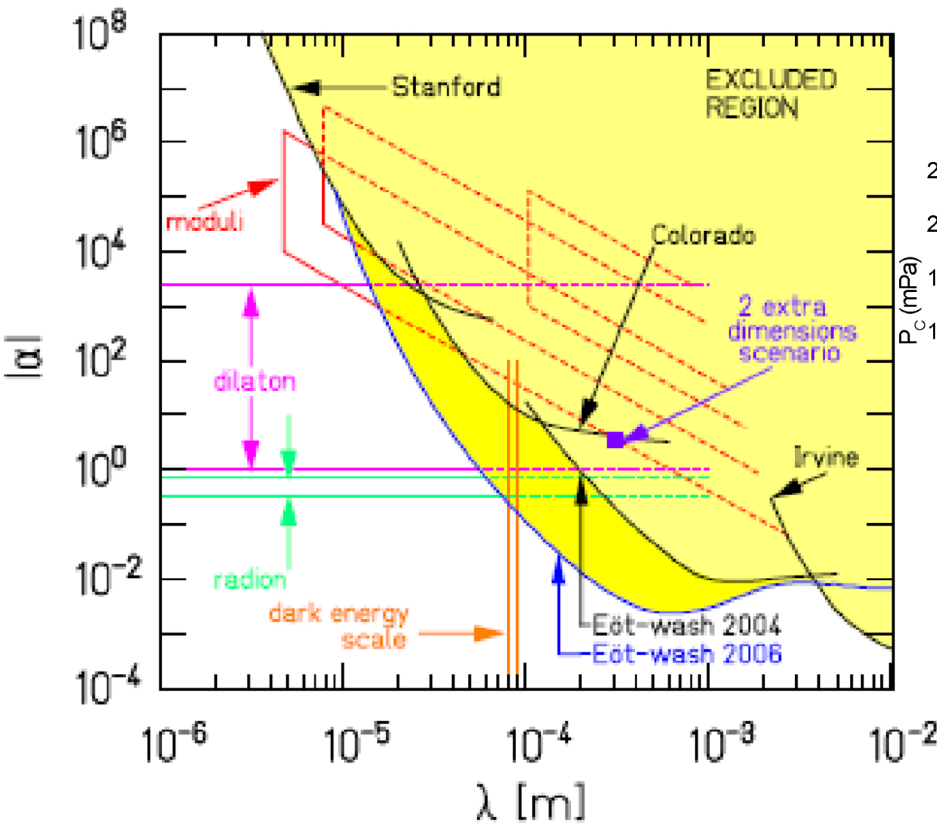
PHYSICAL REVIEW D 75, 077101 (2007)

Tests of new physics from precise measurements of the Casimir pressure between two gold-coated plates

R. S. Decca,¹ D. López,² E. Fischbach,³ G. L. Klimchitskaya,⁴ D. E. Krause,^{5,3} and V. M. Mostepanenko⁶

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + \alpha \cdot e^{-r/\lambda} \right)$$

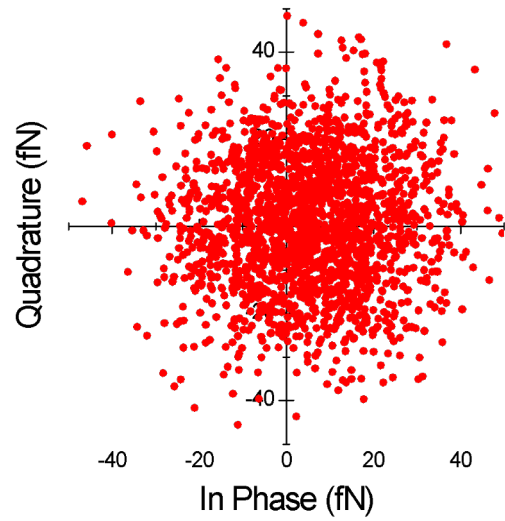
Potencial tipo
"Yukawa"



Atracción gravitatoria: test de modelos

$$z = 500 \text{ nm}$$

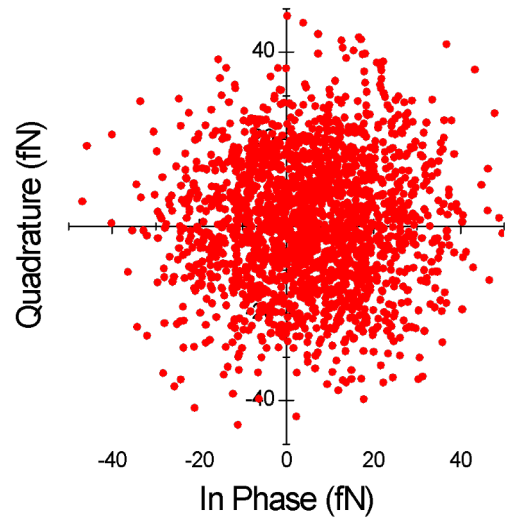
1 seg



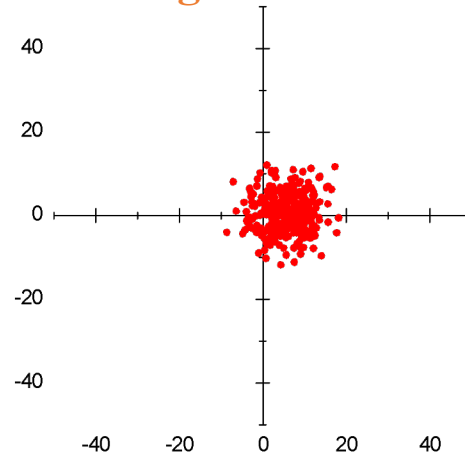
Atracción gravitatoria: test de modelos

$$z = 500 \text{ nm}$$

1 seg

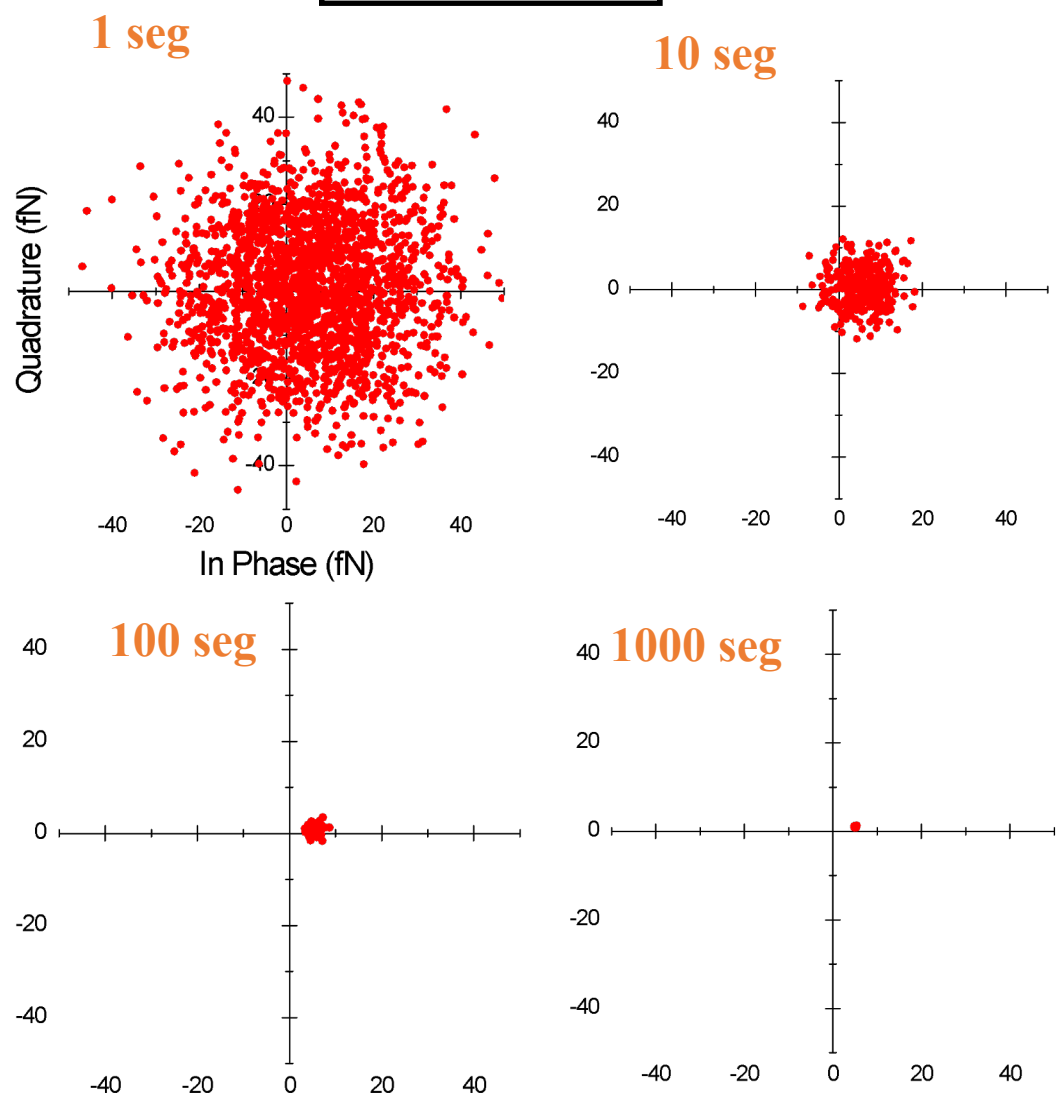


10 seg



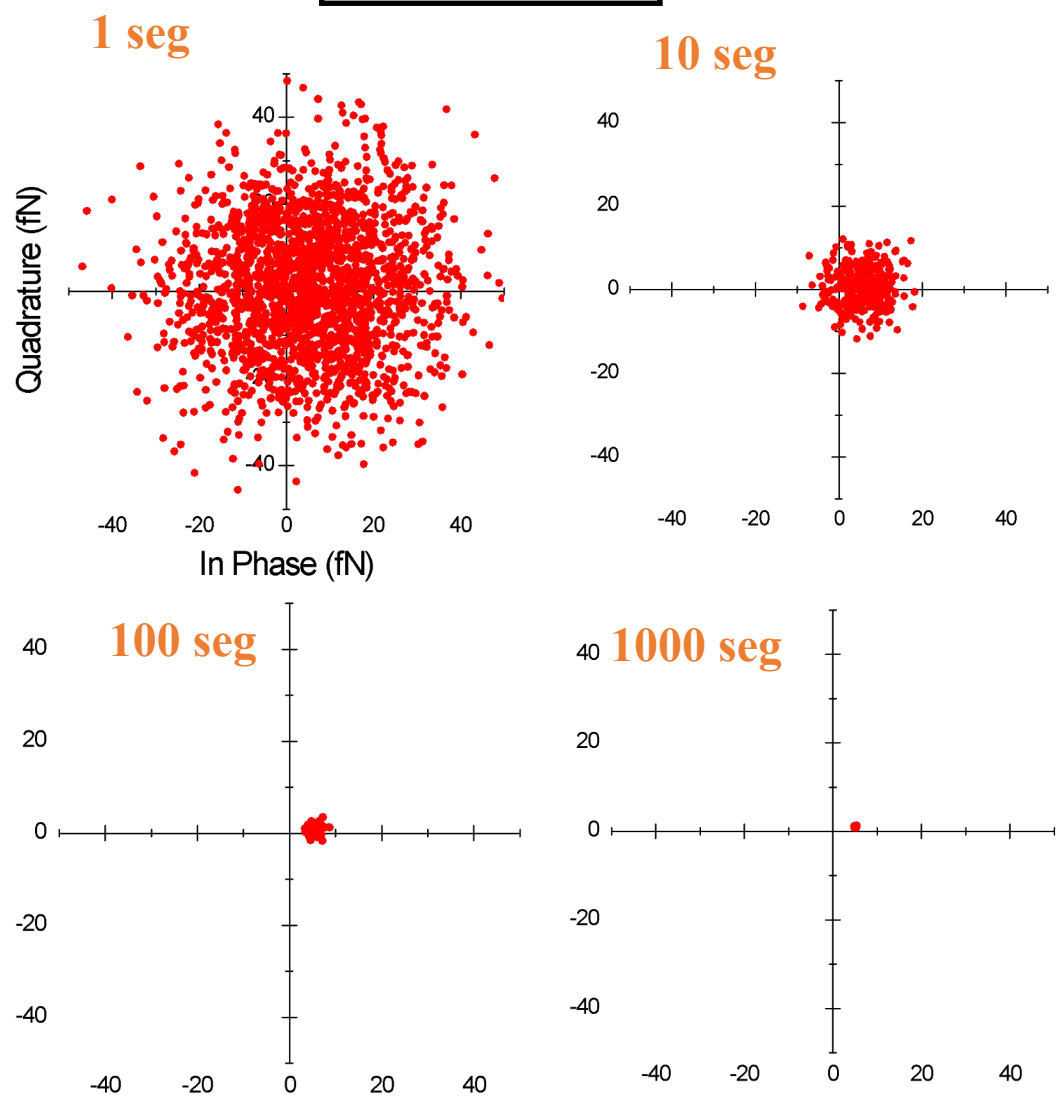
Atracción gravitatoria: test de modelos

$z = 500 \text{ nm}$

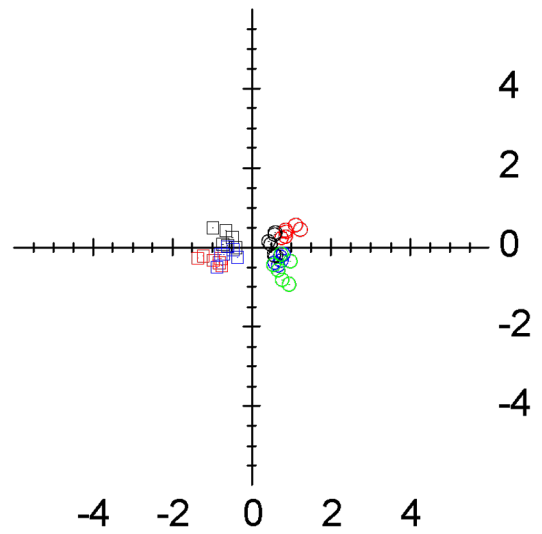


Atracción gravitatoria: test de modelos

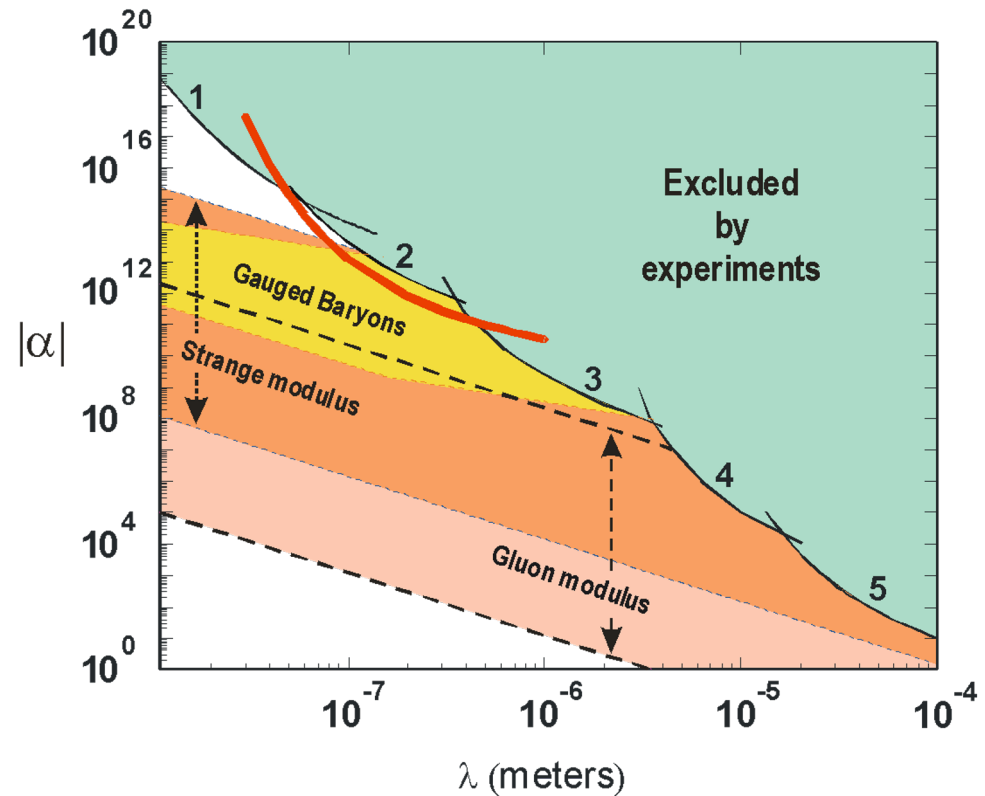
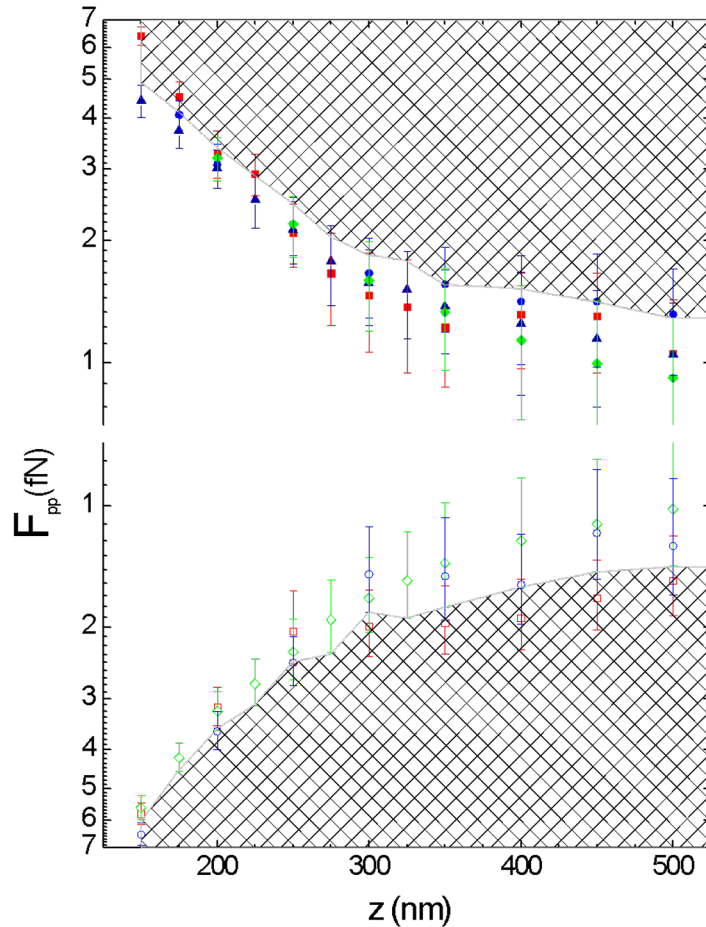
$$z = 500 \text{ nm}$$



**Test de consistencia:
más muestras!**



Atracción gravitatoria: test de modelos



**La incertidumbre en el experimento...
y en la teoría**

Física Experimental / Laboratorio I

Clase #3

Promedios pesados

El problema?: cómo combinar dos mediciones independientes de *la misma* cantidad física:

$$x = x_A \pm \sigma_A$$

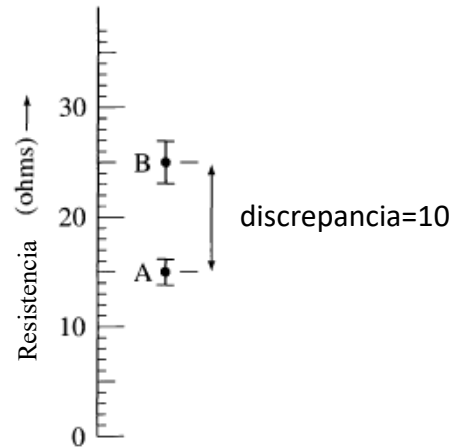
$$x = x_B \pm \sigma_B.$$

Promedios pesados

El problema?: cómo combinar dos mediciones independientes de *la misma* cantidad física:

$$x = x_A \pm \sigma_A$$

$$x = x_B \pm \sigma_B$$



Caso #1: Mediciones *inconsistentes*

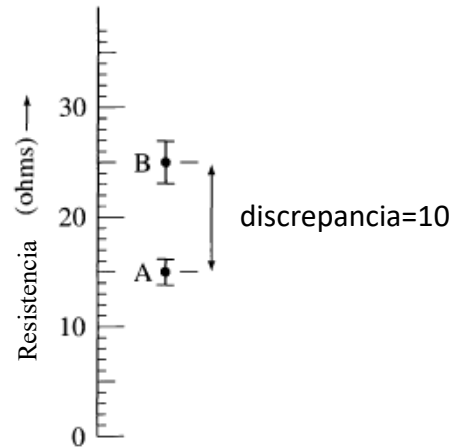
$$|x_A - x_B| \gg \sigma_A, \sigma_B$$

Promedios pesados

El problema?: cómo combinar dos mediciones independientes de *la misma* cantidad física:

$$x = x_A \pm \sigma_A$$

$$x = x_B \pm \sigma_B$$



Caso #1: Mediciones *inconsistentes*

$$|x_A - x_B| \gg \sigma_A, \sigma_B$$



$$x_{exp} = (x_A + x_B)/2$$

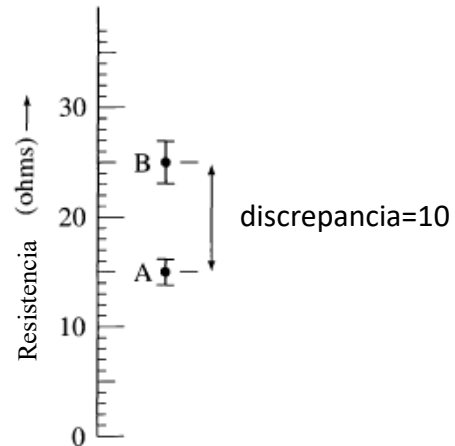
$$\sigma_x = |x_A - x_B|/2$$

Promedios pesados

El problema?: cómo combinar dos mediciones independientes de *la misma* cantidad física:

$$x = x_A \pm \sigma_A$$

$$x = x_B \pm \sigma_B$$



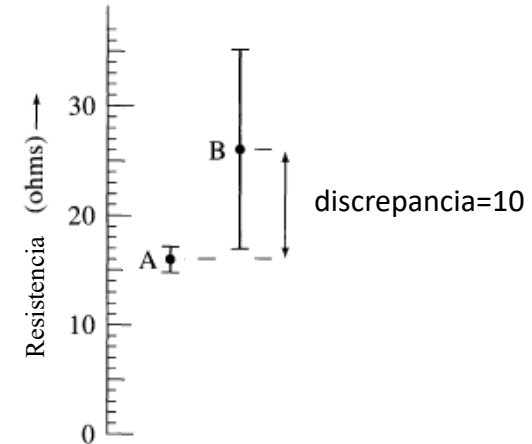
Caso #1: Mediciones *inconsistentes*

$$|x_A - x_B| \gg \sigma_A, \sigma_B$$



$$x_{exp} = (x_A + x_B)/2$$

$$\sigma_x = |x_A - x_B|/2$$



Caso #2: Mediciones **consistentes**

$$|x_A - x_B| \not\gg \sigma_A, \sigma_B$$

?

Promedios pesados

$$Prob(x_A) \propto \frac{1}{\sigma_A} e^{-(x_A - X)^2 / 2\sigma_A^2}$$

$$Prob(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_B} e^{-(x_B - X)^2 / 2\sigma_B^2}$$

Promedios pesados

$$Prob(x_A) \propto \frac{1}{\sigma_A} e^{-(x_A - X)^2 / 2\sigma_A^2}$$

$$Prob(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_B} e^{-(x_B - X)^2 / 2\sigma_B^2}$$

Suponiendo que ambos experimentos son independientes,

$$Prob(x_A, x_B) = Prob(x_A) \times Prob(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_A \sigma_B} e^{-\chi^2 / 2}$$

donde $\chi^2 = \left(\frac{x_A - X}{\sigma_A} \right)^2 + \left(\frac{x_B - X}{\sigma_B} \right)^2$

Promedios pesados

$$Prob(x_A) \propto \frac{1}{\sigma_A} e^{-(x_A - X)^2 / 2\sigma_A^2}$$

$$Prob(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_B} e^{-(x_B - X)^2 / 2\sigma_B^2}$$

Suponiendo que ambos experimentos son independientes,

$$Prob(x_A, x_B) = Prob(x_A) \times Prob(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_A \sigma_B} e^{-\chi^2 / 2}$$

donde $\chi^2 = \left(\frac{x_A - X}{\sigma_A} \right)^2 + \left(\frac{x_B - X}{\sigma_B} \right)^2$

Aplicando el principio de máxima verosimilitud, maximizar $Prob(x_A, x_B)$ es equivalente a *minimizar* χ^2 (por eso se llama “método de cuadrados mínimos”):

$$\frac{x_A - X}{\sigma_A^2} + \frac{x_B - X}{\sigma_B^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad (\text{mejor estimador de } X) = \left(\frac{x_A}{\sigma_A^2} + \frac{x_B}{\sigma_B^2} \right) / \left(\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_B^2} \right)$$

Promedios pesados

$$Prob(x_A) \propto \frac{1}{\sigma_A} e^{-(x_A - X)^2 / 2\sigma_A^2}$$

$$Prob(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_B} e^{-(x_B - X)^2 / 2\sigma_B^2}$$

Suponiendo que ambos experimentos son independientes,

$$Prob(x_A, x_B) = Prob(x_A) \times Prob(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_A \sigma_B} e^{-\chi^2 / 2}$$

donde $\chi^2 = \left(\frac{x_A - X}{\sigma_A} \right)^2 + \left(\frac{x_B - X}{\sigma_B} \right)^2$

Aplicando el principio de máxima verosimilitud, maximizar $Prob(x_A, x_B)$ es equivalente a *minimizar* χ^2 (por eso se llama “método de cuadrados mínimos”):

$$\frac{x_A - X}{\sigma_A^2} + \frac{x_B - X}{\sigma_B^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad (\text{mejor estimador de } X) = \left(\frac{x_A}{\sigma_A^2} + \frac{x_B}{\sigma_B^2} \right) / \left(\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_B^2} \right)$$

Si definimos los “pesos” $w_A = 1/\sigma_A^2$ y $w_B = 1/\sigma_B^2$: $\longrightarrow$ (mejor estimador de X) = $\frac{w_A x_A + w_B x_B}{w_A + w_B}$

En general

$$x_{pp} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

Con $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$

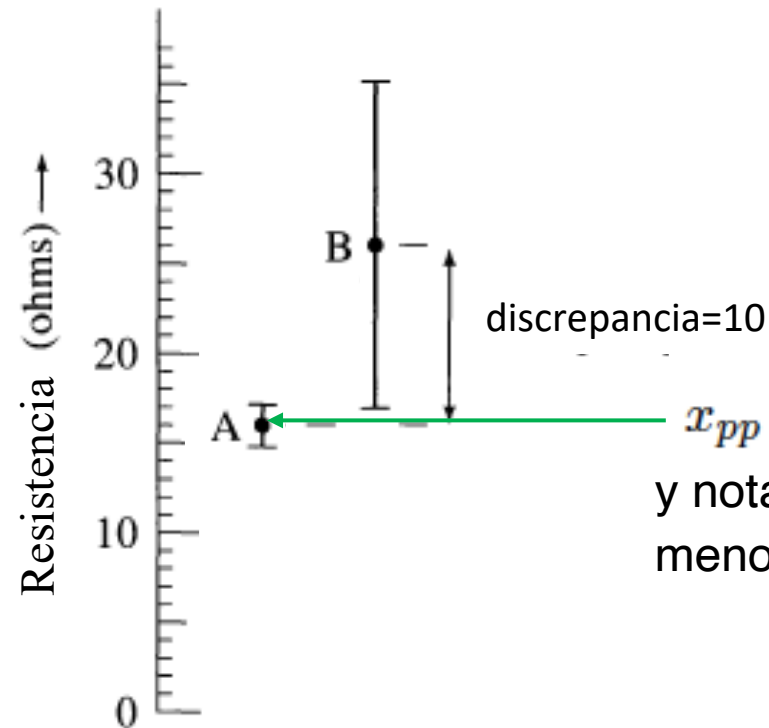
y $\sigma_{pp} = \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}}$

Promedios pesados

El problema?: cómo combinar dos mediciones independientes de *la misma* cantidad física:

$$x = x_A \pm \sigma_A$$

$$x = x_B \pm \sigma_B$$



y notar que σ_{pp} es menor al menor de los dos, σ_A y σ_B

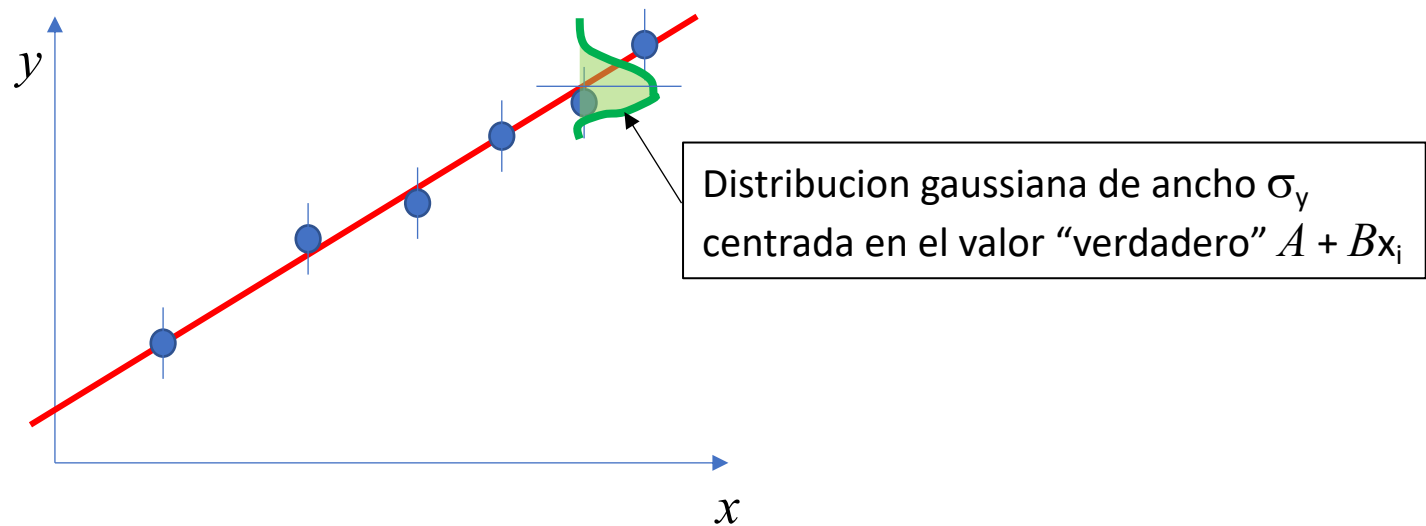
Caso #2: Mediciones **consistentes**

$$|x_A - x_B| \not\gg \sigma_A, \sigma_B$$

Ajuste por cuadrados mínimos

Objetivo: encontrar la mejor línea recta $y = A^* + B^*x$ que ajuste un conjunto de pares de puntos medidos $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$.

Para simplificar supondremos que las mediciones de y están afectadas por incertezas, pero las de x no. Y supondremos que las incertezas en y siguen una distribución gaussiana, todas con *el mismo ancho* σ_y .



Ajuste por cuadrados mínimos

La probabilidad de obtener un dado par de valores (x_i, y_i) se obtiene como:

$$Prob_{A,B}(y_i) \propto \frac{1}{\sigma_y} e^{-(y_i - A - Bx_i)^2 / 2\sigma_y^2}$$

Entonces la probabilidad de obtener el conjunto completo de mediciones $y_1, \dots, y_N$, entendidas como independientes es

$$Prob_{A,B}(y_1, \dots, y_N) \propto \frac{1}{\sigma_y^N} e^{-\chi^2/2} \quad \text{con} \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_y^2}$$

Ajuste por cuadrados mínimos: determinación de A^* y B^* , y de sus incertezas

Los mejores estimadores para A y B son aquellos que maximizan esta probabilidad, y por lo tanto minimizan χ^2 . Para encontrarlos diferenciamos χ^2 respecto a A y B , e igualamos a cero:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A} = \frac{-2}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial B} = \frac{-2}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^N x_i (y_i - A - Bx_i) = 0$$

Ajuste por cuadrados mínimos: determinación de A^* y B^* , y de sus incertezas

Los mejores estimadores para A y B son aquellos que maximizan esta probabilidad, y por lo tanto minimizan χ^2 . Para encontrarlos diferenciamos χ^2 respecto a A y B , e igualamos a cero:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A} = \frac{-2}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial B} = \frac{-2}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^N x_i (y_i - A - Bx_i) = 0$$

Estas corresponden a un sistema de dos ecuaciones para las dos incógnitas A y B ,

$$AN + B \sum x_i = \sum y_i$$

$$A \sum x_i + B \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

de donde

$$A^* = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$

$$B^* = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}$$

con

$$\Delta = N \sum x^2 - (\sum x)^2$$

Ajuste por cuadrados mínimos: determinación de A^* y B^* , y de sus incertezas

Los mejores estimadores para A y B son aquellos que maximizan esta probabilidad, y por lo tanto minimizan χ^2 . Para encontrarlos diferenciamos χ^2 respecto a A y B , e igualamos a cero:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A} = \frac{-2}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial B} = \frac{-2}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^N x_i (y_i - A - Bx_i) = 0$$

Estas corresponden a un sistema de dos ecuaciones para las dos incógnitas A y B ,

$$AN + B \sum x_i = \sum y_i$$

$$A \sum x_i + B \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

de donde

$$A^* = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$

$$B^* = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}$$

con

$$\Delta = N \sum x^2 - (\sum x)^2$$

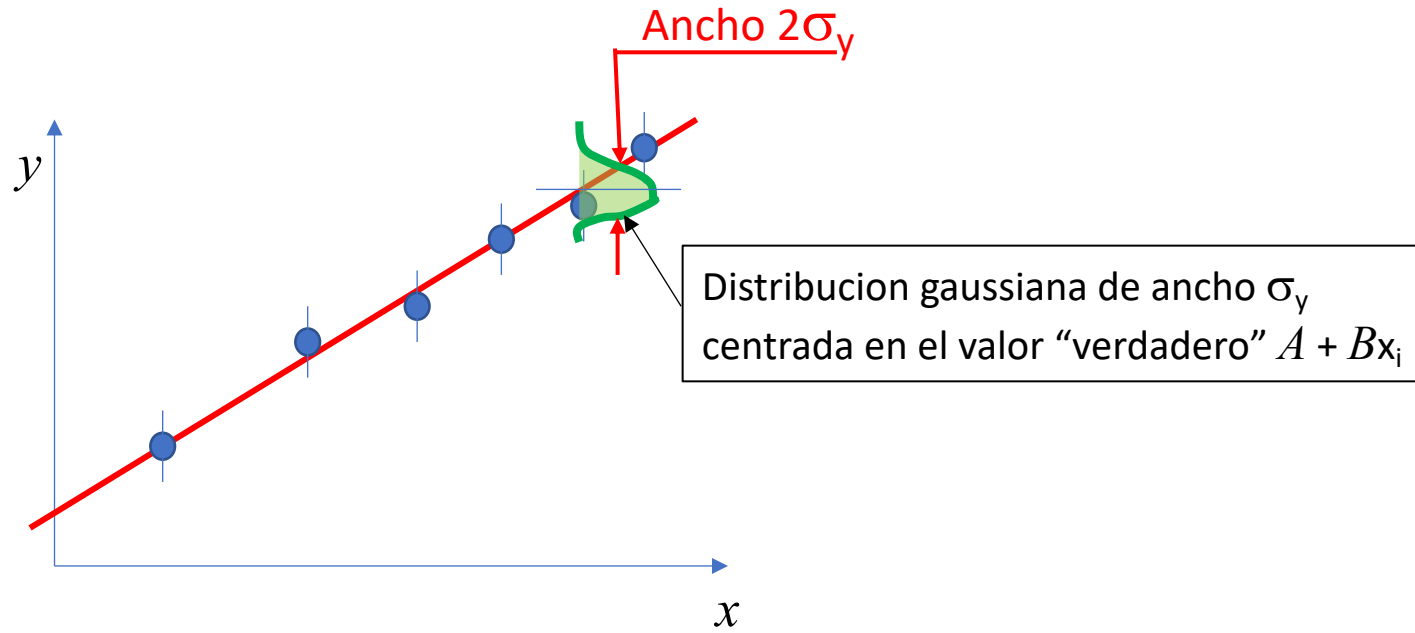
Los estimadores de A y B resultan ser funciones simples de los y_i . Sus incertezas pueden entonces encontrarse simplemente propagando errores:

$$\sigma_{A^*} = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}$$

$$\sigma_{B^*} = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

Ajuste por cuadrados mínimos: determinación de σ_y

La incerteza en y podría obtenerse de medir repetidas veces la cantidad y_i para un dado x_i :

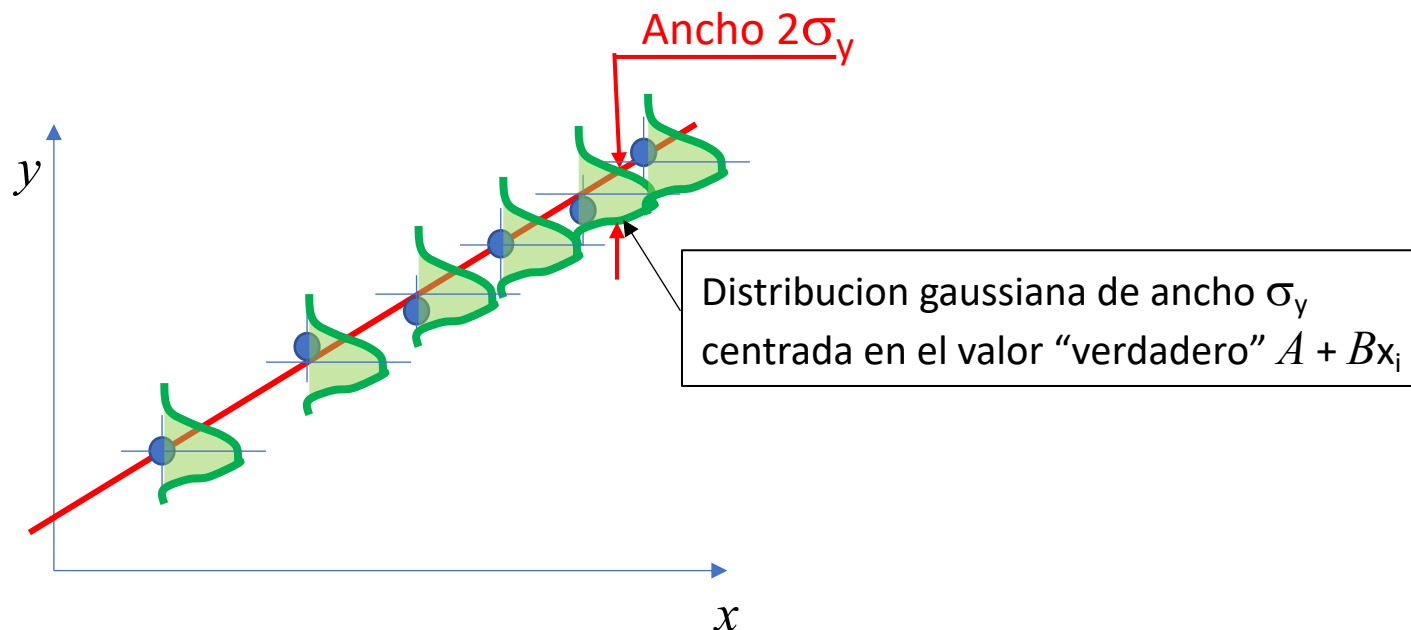


Ajuste por cuadrados mínimos: determinación de σ_y

La incerteza en y podría obtenerse de medir repetidas veces la cantidad y_i para un dado x_i . Por otro lado, es intuitivo pensar que lo mismo se puede lograr usando el conjunto ya obtenido de pares $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ haciendo:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (y_i - A - Bx_i)^2}$$

Esta expresión puede también encontrarse con el principio de máxima verosimilitud, diferenciando respecto a σ_y .



Ajuste por cuadrados mínimos: determinación de σ_y

La incerteza en y podría obtenerse de medir repetidas veces la cantidad y_i para un dado x_i . Por otro lado, es intuitivo pensar que lo mismo se puede lograr usando el conjunto ya obtenido de pares $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ haciendo:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (y_i - A - Bx_i)^2}$$

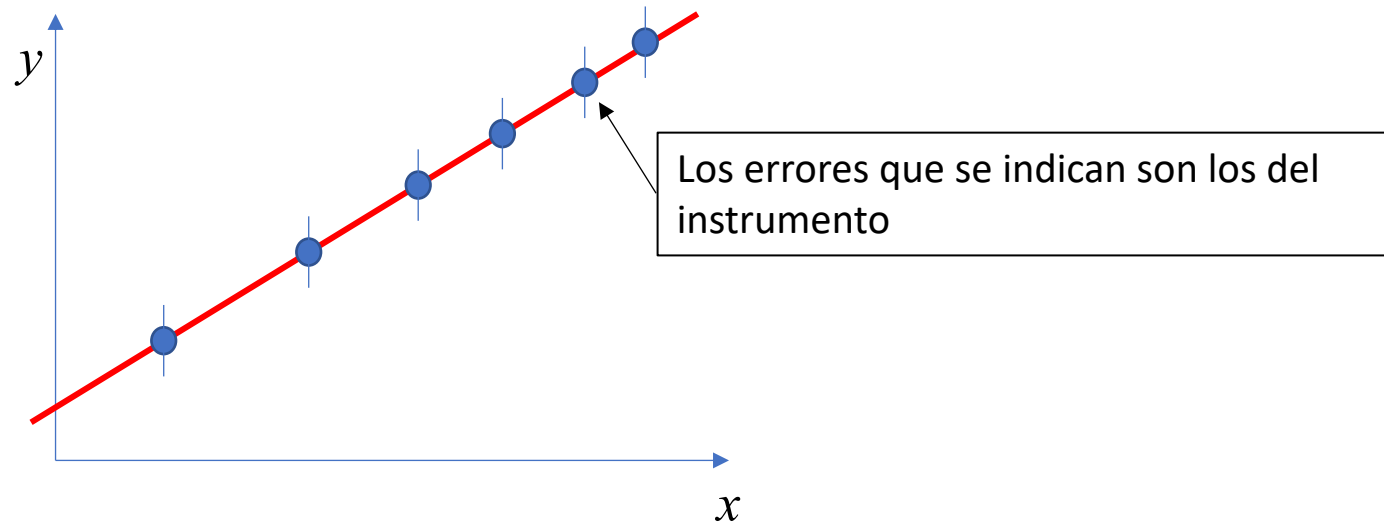
Esta expresión puede también encontrarse con el principio de máxima verosimilitud, diferenciando respecto a σ_y .

El problema igual que antes es que no conocemos a A y B , sino a sus estimadores. Se puede demostrar que la expresión correcta cuando se usan los estimadores es:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum (y_i - A^* - B^*x_i)^2}$$

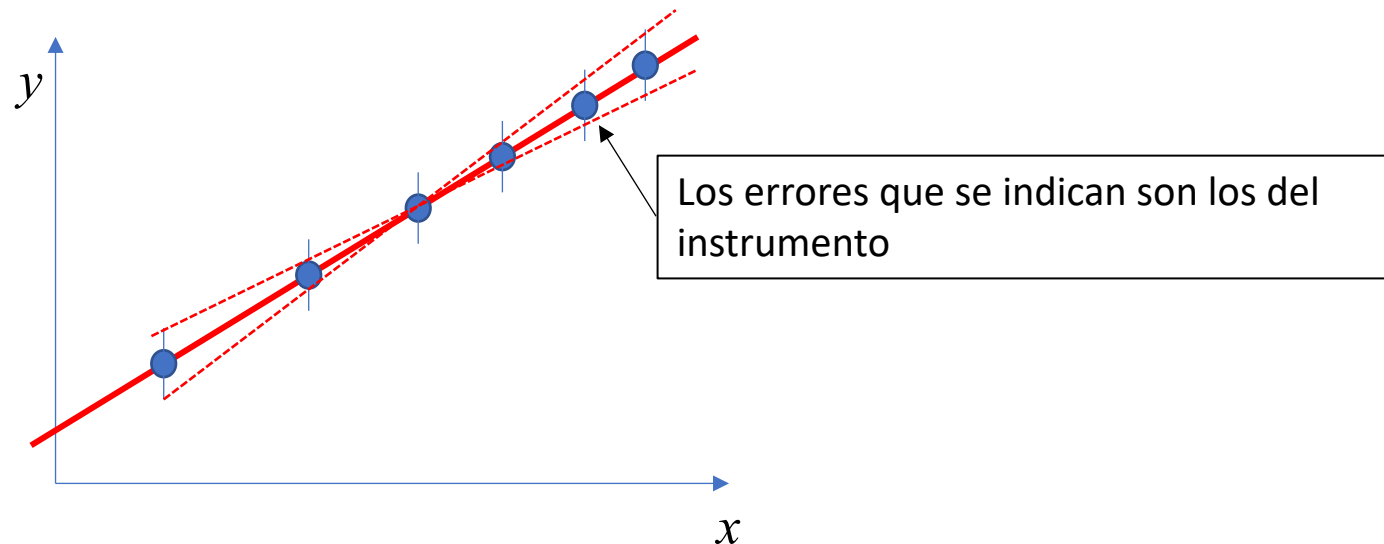
Cómo tener en cuenta los errores sistemáticos/instrumentales?

Puede ocurrir que los errores del ajuste sean mínimos comparado con los errores sistemáticos:



Cómo tener en cuenta los errores sistemáticos/instrumentales?

Puede ocurrir que los errores del ajuste sean mínimos comparado con los errores sistemáticos:



Sugerencia 1: estimar la máxima y mínima pendiente posible compatible con esas incertezas

Sugerencia 2: elegir un valor de x en la mitad de la escala y propagar para ese valor las incertezas de los instrumentos utilizados

$$\frac{\delta B_{inst}}{B} = \sqrt{\left(\frac{\delta y_{inst}}{y}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_{inst}}{x}\right)^2}$$

En ambos casos

$$\delta B = \sqrt{(\delta B_{ajuste})^2 + (\delta B_{inst})^2}$$

Covarianza

Buscamos evaluar $q(x,y)$

Medimos dos cantidades x e y , obteniendo N pares $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$.

De las N mediciones $x_1, \dots, x_N$ se puede computar $\overline{x}$ y σ_x ,

De las mediciones $y_1, \dots, y_N$ se puede computar $\overline{y}$ y σ_y .

De manera similar, podemos calcular N veces $q_i = q(x_i, y_i)$, y de ahí $\overline{q}$ y σ_q .

Covarianza

Buscamos evaluar $q(x, y)$

Medimos dos cantidades x e y , obteniendo N pares de $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$.

De las N mediciones $x_1, \dots, x_N$ se puede computar $\bar{x}$ y σ_x ,

De las mediciones $y_1, \dots, y_N$ se puede computar $\bar{y}$ y σ_y .

De manera similar, podemos calcular N veces $q_i = q(x_i, y_i)$, y de ahí $\bar{q}$ y σ_q .

Suponemos que las variaciones son pequeñas, y que por lo tanto los x_i están cerca de $\bar{x}$ y los y_i están cerca de $\bar{y}$. Entonces:

$$q_i = q(x_i, y_i) \\ \approx q(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial q}{\partial x}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial q}{\partial y}(y_i - \bar{y})$$

Las derivadas parciales son evaluadas en $\bar{x}$ y en $\bar{y}$, y por lo tanto son constantes y las mismas para todo i .

Covarianza

Buscamos evaluar $q(x, y)$

Medimos dos cantidades x e y , obteniendo N pares de $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$.

De las N mediciones $x_1, \dots, x_N$ se puede computar $\bar{x}$ y σ_x ,

De las mediciones $y_1, \dots, y_N$ se puede computar $\bar{y}$ y σ_y .

De manera similar, podemos calcular N veces $q_i = q(x_i, y_i)$, y de ahí $\bar{q}$ y σ_q .

Suponemos que las variaciones son pequeñas, y que por lo tanto los x_i están cerca de $\bar{x}$ y los y_i están cerca de $\bar{y}$. Entonces:

$$\begin{aligned} q_i &= q(x_i, y_i) \\ &\approx q(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial q}{\partial x}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial q}{\partial y}(y_i - \bar{y}) \end{aligned}$$

Las derivadas parciales son evaluadas en $\bar{x}$ y en $\bar{y}$, y por lo tanto son constantes y las mismas para todo i . Entonces

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[q(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial q}{\partial x}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial q}{\partial y}(y_i - \bar{y}) \right] \end{aligned}$$

Covarianza

Buscamos evaluar $q(x, y)$

Medimos dos cantidades x e y , obteniendo N pares de $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$.

De las N mediciones $x_1, \dots, x_N$ se puede computar $\bar{x}$ y σ_x ,

De las mediciones $y_1, \dots, y_N$ se puede computar $\bar{y}$ y σ_y .

De manera similar, podemos calcular N veces $q_i = q(x_i, y_i)$, y de ahí $\bar{q}$ y σ_q .

Suponemos que las variaciones son pequeñas, y que por lo tanto los x_i están cerca de $\bar{x}$ y los y_i están cerca de $\bar{y}$. Entonces:

$$q_i = q(x_i, y_i) \\ \approx q(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial q}{\partial x}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial q}{\partial y}(y_i - \bar{y})$$

Las derivadas parciales son evaluadas en $\bar{x}$ y en $\bar{y}$, y por lo tanto son constantes y las mismas para todo i . Entonces

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[q(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial q}{\partial x}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial q}{\partial y}(y_i - \bar{y}) \right] = q(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

Covarianza

La desviación estándar para los N valores q_i es entonces

$$\begin{aligned}\sigma_q^2 &= \frac{1}{N-1} \sum (q_i - \bar{q})^2 = \frac{1}{N-1} \sum \left[\frac{\partial q}{\partial x} (x_i - \bar{x}) + \frac{\partial q}{\partial y} (y_i - \bar{y}) \right]^2 \\ &= \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 \frac{1}{N-1} \sum (y_i - \bar{y})^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\end{aligned}$$

Covarianza

La desviación estándar para los N valores q_i es entonces

$$\begin{aligned}\sigma_q^2 &= \frac{1}{N-1} \sum (q_i - \bar{q})^2 = \frac{1}{N-1} \sum \left[\frac{\partial q}{\partial x} (x_i - \bar{x}) + \frac{\partial q}{\partial y} (y_i - \bar{y}) \right]^2 \\ &= \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 \frac{1}{N-1} \sum (y_i - \bar{y})^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\end{aligned}$$

de donde

$$\sigma_q^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + 2 \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} \sigma_{xy}$$

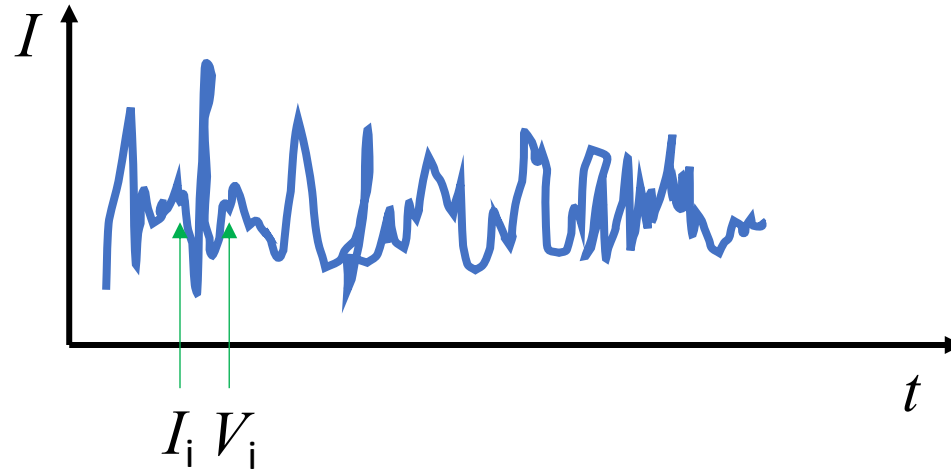
con la “covarianza” definida como

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Ejemplo #1: Resistencia y potencia en el método de 4 puntas

Buscamos medir una resistencia R como $R = V/I$, y la potencia disipada como $P = V.I$

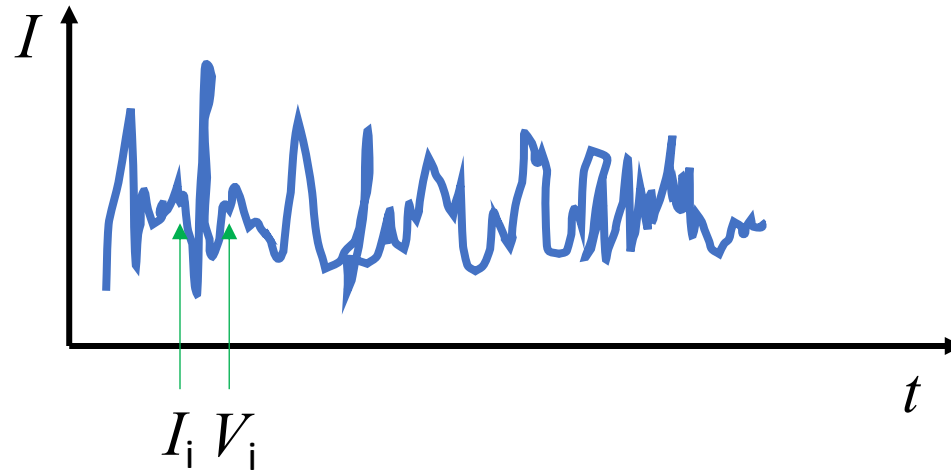
Caso #1: las fluctuaciones en la corriente son tan *rápidas* que al medir la tensión ambas incertezas son ***independientes***



Ejemplo #1: Resistencia y potencia en el método de 4 puntas

Buscamos medir una resistencia R como $R = V/I$, y la potencia disipada como $P = V.I$

Caso #1: las fluctuaciones en la corriente son tan *rápidas* que al medir la tensión ambas incertezas son ***independientes***



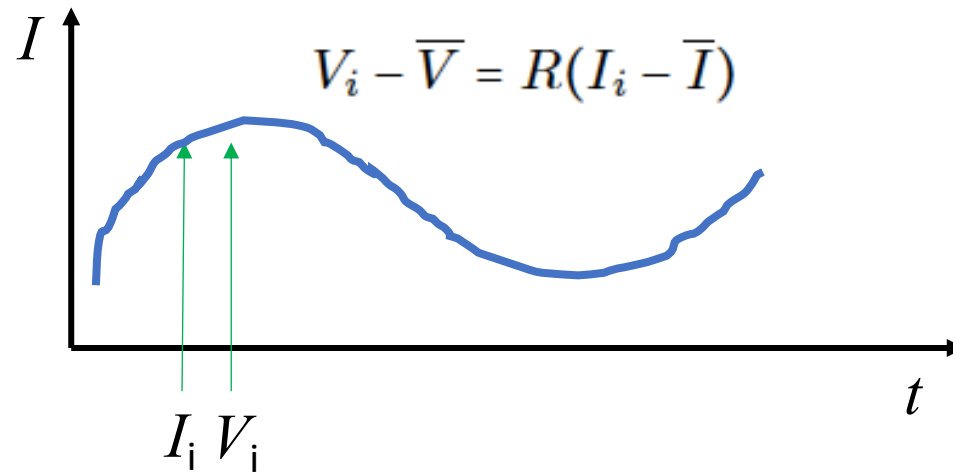
$$(\delta R)^2 = \frac{1}{I^2} \delta V^2 + \left(\frac{V}{I^2} \right)^2 \delta I^2 = \frac{1}{I^2} (\delta V^2 + R^2 \delta I^2)$$

$$(\delta P)^2 = I^2 \delta V^2 + V^2 \delta I^2 = I^2 (\delta V^2 + R^2 \delta I^2)$$

Ejemplo #1: Resistencia y potencia en el método de 4 puntas

Buscamos medir una resistencia R como $R = V/I$, y la potencia disipada como $P = V.I$

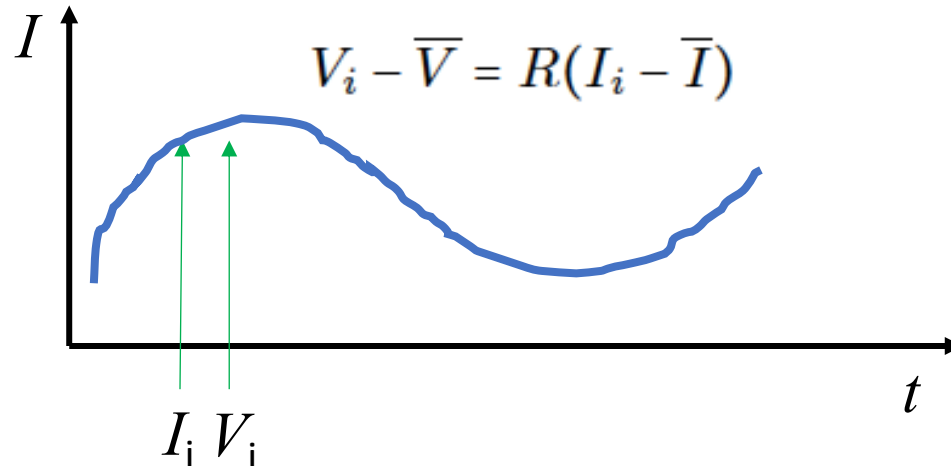
Caso #2: las fluctuaciones en la corriente son tan *lentas* que al medir la tensión ambas incertezas son ***dependientes***



Ejemplo #1: Resistencia y potencia en el método de 4 puntas

Buscamos medir una resistencia R como $R = V/I$, y la potencia disipada como $P = V.I$

Caso #2: las fluctuaciones en la corriente son tan *lentas* que al medir la tensión ambas incertezas son **dependientes**

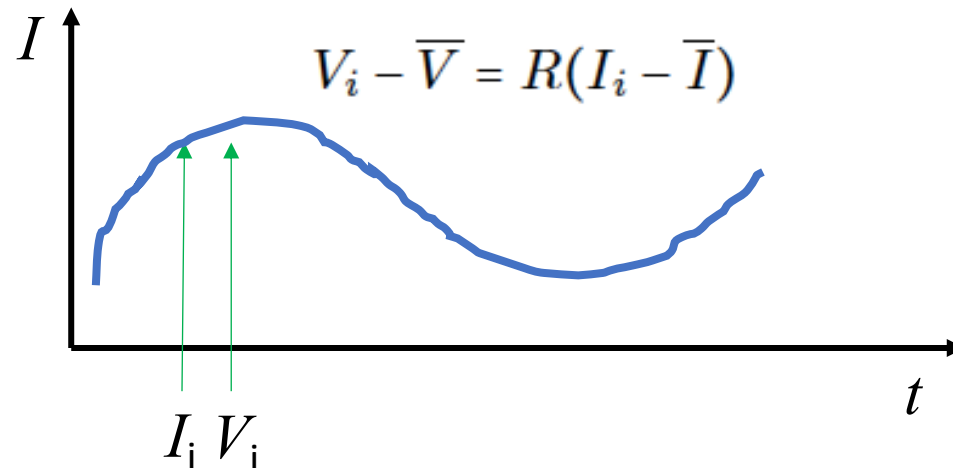


En este caso entonces
$$\sigma_{VI}^2 = \frac{1}{N-1} \sum (V_i - \bar{V})(I_i - \bar{I}) = R\sigma_I^2$$

Ejemplo #1: Resistencia y potencia en el método de 4 puntas

Buscamos medir una resistencia R como $R = V/I$, y la potencia disipada como $P = V.I$

Caso #2: las fluctuaciones en la corriente son tan *lentas* que al medir la tensión ambas incertezas son **dependientes**



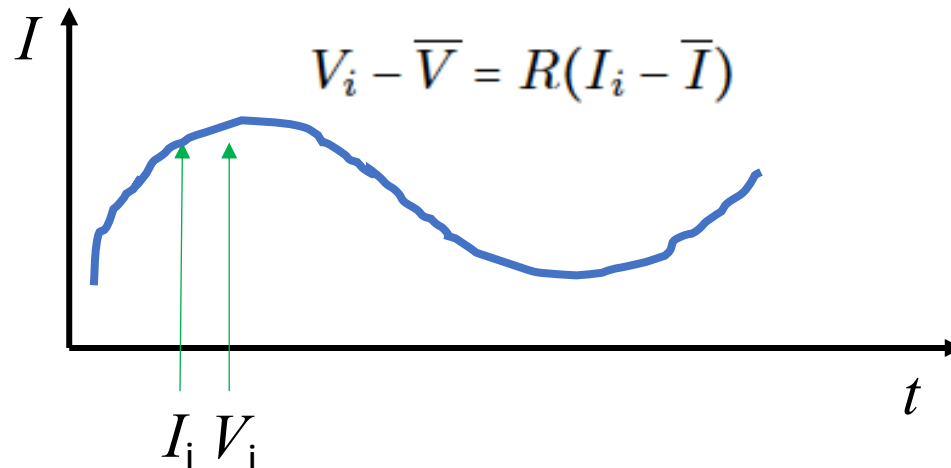
En este caso entonces $\sigma_{VI}^2 = \frac{1}{N-1} \sum (V_i - \bar{V})(I_i - \bar{I}) = R\sigma_I^2$

$$\begin{aligned} (\delta R)^2 &= \frac{1}{I^2} (\delta V^2 + R^2 \delta I^2) + 2 \frac{1}{I} \left(-\frac{V}{I^2} \right) R \delta I^2 \\ &= \frac{R^2}{I^2} (2\delta I^2) - 2 \frac{VR}{I^3} \delta I^2 \\ &= \frac{R^2}{I^2} (2\delta I^2) - \frac{R^2}{I^2} (2\delta I^2) = 0!! \end{aligned}$$

Ejemplo #1: Resistencia y potencia en el método de 4 puntas

Buscamos medir una resistencia R como $R = V/I$, y la potencia disipada como $P = V.I$

Caso #2: las fluctuaciones en la corriente son tan *lentas* que al medir la tensión ambas incertezas son **dependientes**



En este caso entonces $\sigma_{VI}^2 = \frac{1}{N-1} \sum (V_i - \bar{V})(I_i - \bar{I}) = R\sigma_I^2$

Mientras que

$$(\delta P)^2 = I^2 R^2 (2\delta I)^2 + 2VIR\delta I^2 = 4I^2 R^2 \delta I^2 \neq 0$$

Recordar que el caso no correlacionado era

$$(\delta P)^2 = I^2 \delta V^2 + V^2 \delta I^2 = I^2 (\delta V^2 + R^2 \delta I^2)$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

Consideremos un ajuste lineal por cuadrados mínimos $y = a + bx$, que resulta en los mejores estimadores

$$a^* = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b^* = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

Consideremos un ajuste lineal por cuadrados mínimos $y = a + bx$, que resulta en los mejores estimadores

$$a^* = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \qquad b^* = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

Consideremos el punto $\bar{x} = \frac{\sum x}{N}$ y $\bar{y} = \frac{\sum y}{N}$. Entonces:

$$\begin{aligned} a^* + b^* \bar{x} &= \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy + \left[\sum xy \sum x - (\sum x)^2 \frac{\sum y}{N} \right]}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \\ &= \frac{\sum y}{N} \left[\frac{N \sum x^2 - (\sum x)^2}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \right] \\ &= \bar{y} \end{aligned}$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

Consideremos un ajuste lineal por cuadrados mínimos $y = a + bx$, que resulta en los mejores estimadores

$$a^* = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \qquad b^* = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

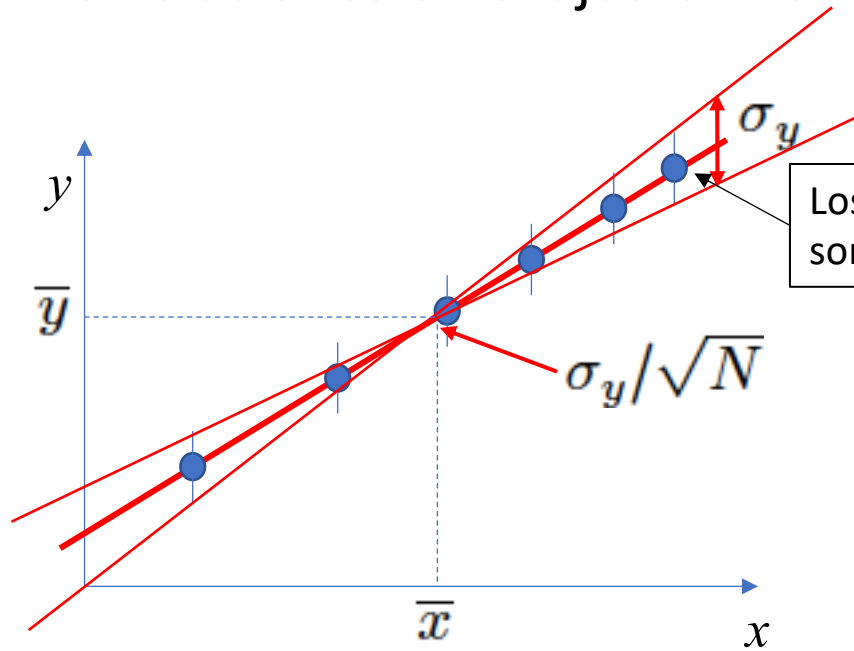
Consideremos el punto $\bar{x} = \frac{\sum x}{N}$ y $\bar{y} = \frac{\sum y}{N}$. Entonces:

$$\begin{aligned} a^* + b^* \bar{x} &= \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy + \left[\sum xy \sum x - (\sum x)^2 \frac{\sum y}{N} \right]}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \\ &= \frac{\sum y}{N} \left[\frac{N \sum x^2 - (\sum x)^2}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \right] \\ &= \bar{y} \end{aligned}$$

Es decir: el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ es solución de la ecuación lineal ajustada.

Notar que sus fluctuaciones son del orden de $\sigma_y / \sqrt{N}$, mientras que las fluctuaciones de los puntos individuales son del orden de σ_y .

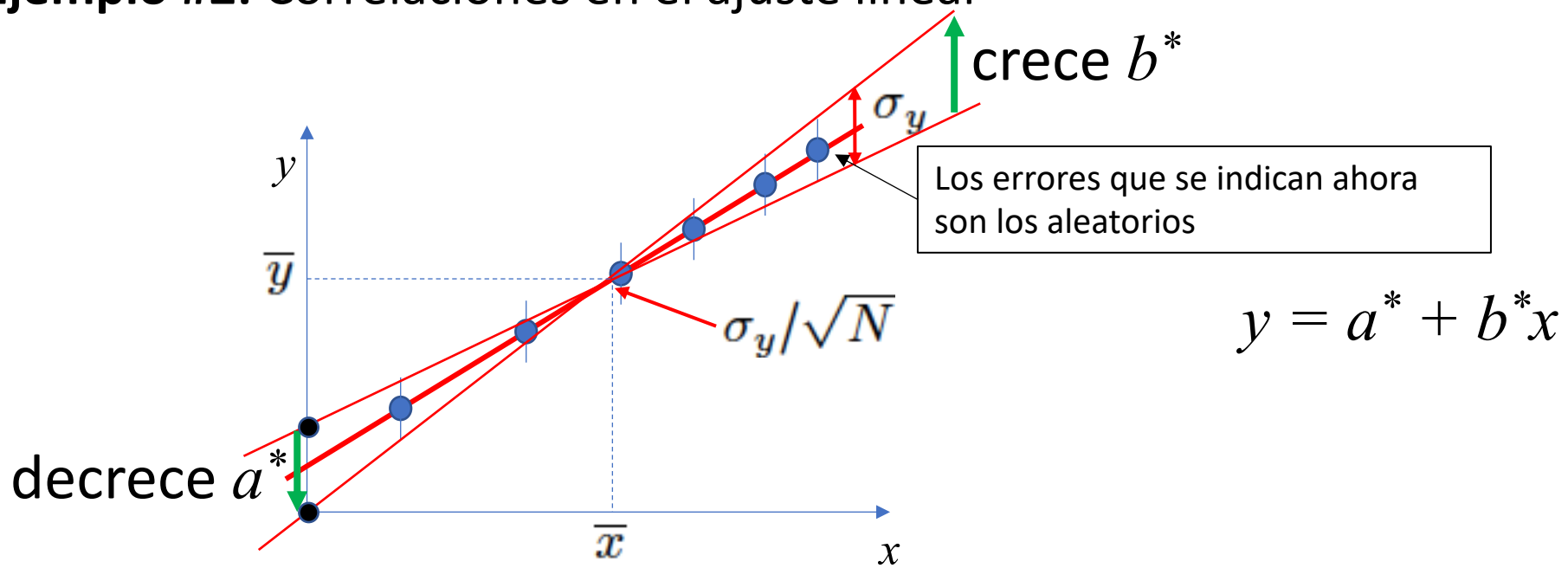
Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal



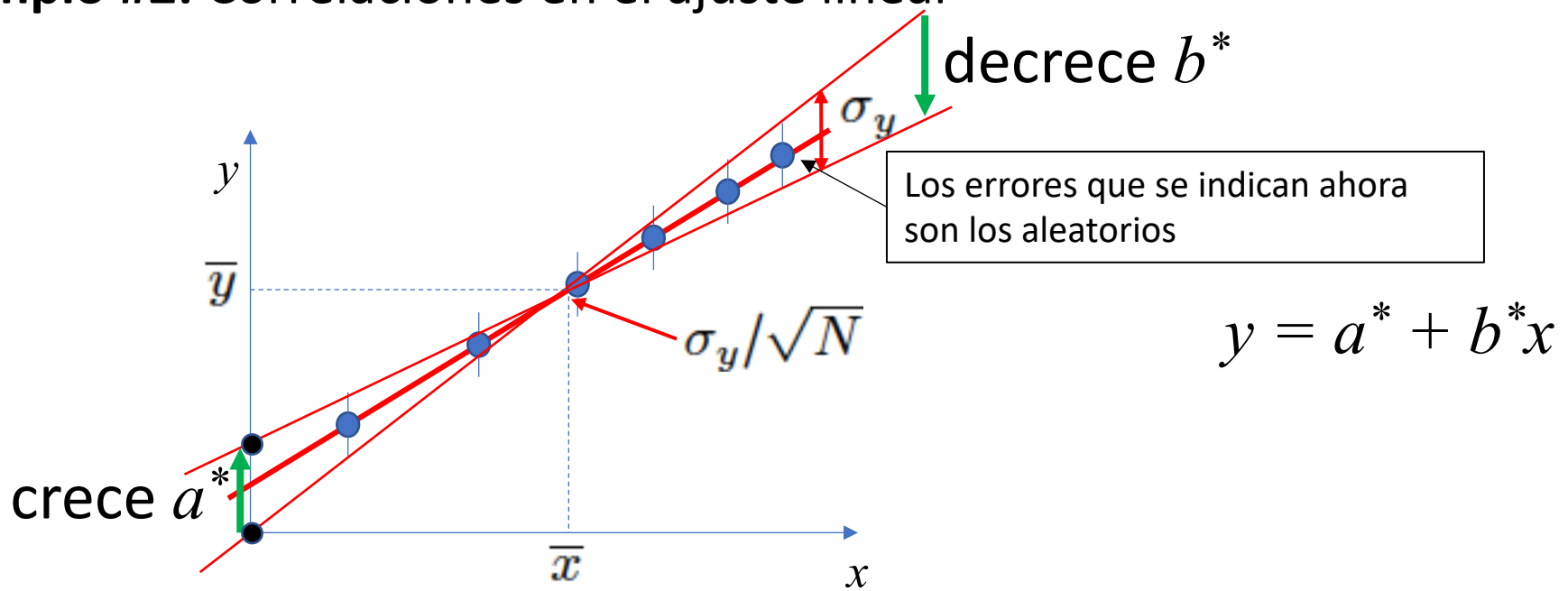
Los errores que se indican ahora son los aleatorios

$$y = a^* + b^*x$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

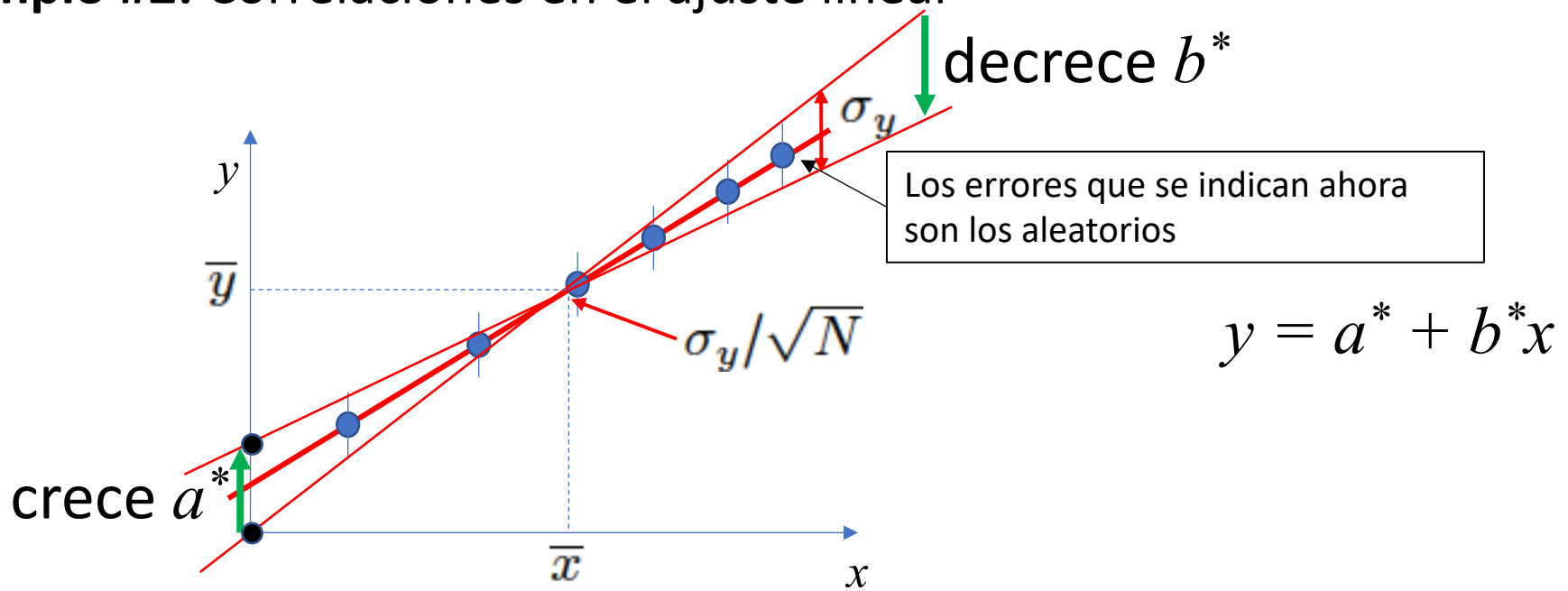


Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal



Es decir que a^* y b^* están fuertemente correlacionados.

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal



Es decir que a^* y b^* están fuertemente correlacionados.

La pregunta es entonces cuánto vale

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{M-1} \sum_{R=1}^M (a_R - \bar{a})(b_R - \bar{b})$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

La filosofía de esto es realizar una serie de ajustes del tipo

$$\begin{array}{c} (x_1, y_1^1)(x_2, y_2^1) \dots (x_N, y_N^1) \rightarrow a_1, b_1 \\ (x_1, y_1^2)(x_2, y_2^2) \dots (x_N, y_N^2) \rightarrow a_2, b_2 \\ \vdots \\ (x_1, y_1^R)(x_2, y_2^R) \dots (x_N, y_N^R) \rightarrow a_R, b_R \\ \vdots \\ (x_1, y_1^M)(x_2, y_2^M) \dots (x_N, y_N^M) \rightarrow a_M, b_M \end{array}$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

La filosofía de esto es realizar una serie de ajustes del tipo

$$\begin{array}{c} (x_1, y_1^1)(x_2, y_2^1) \dots (x_N, y_N^1) \rightarrow a_1, b_1 \\ (x_1, y_1^2)(x_2, y_2^2) \dots (x_N, y_N^2) \rightarrow a_2, b_2 \\ \vdots \\ (x_1, y_1^R)(x_2, y_2^R) \dots (x_N, y_N^R) \rightarrow a_R, b_R \\ \vdots \\ (x_1, y_1^M)(x_2, y_2^M) \dots (x_N, y_N^M) \rightarrow a_M, b_M \end{array}$$

de donde obtenemos

$$(x_1, \overline{y_1})(x_2, \overline{y_2}) \dots (x_N, \overline{y_N}) \rightarrow \overline{a}, \overline{b}$$

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{M-1} \sum_{R=1}^M (a_R - \bar{a})(b_R - \bar{b})$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

Desarrollando a_R y b_R alrededor de sus valores medios tenemos que

$$a_R = \bar{a} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial a}{\partial y_i} (y_i^R - \bar{y}_i)$$

$$b_R = \bar{b} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial b}{\partial y_j} (y_j^R - \bar{y}_j)$$

de donde

$$\begin{aligned} \sigma_{ab} &= \frac{1}{M-1} \sum_{R=1}^M \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial a}{\partial y_i} (y_i^R - \bar{y}_i) \sum_{j=1}^N \frac{\partial b}{\partial y_j} (y_j^R - \bar{y}_j) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial a}{\partial y_i} \frac{\partial b}{\partial y_j} \left[\frac{1}{M-1} \sum_{R=1}^M (y_i^R - \bar{y}_i)(y_j^R - \bar{y}_j) \right] \end{aligned}$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

Desarrollando a_R y b_R alrededor de sus valores medios tenemos que

$$a_R = \bar{a} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial a}{\partial y_i} (y_i^R - \bar{y}_i)$$
$$b_R = \bar{b} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial b}{\partial y_j} (y_j^R - \bar{y}_j)$$

de donde

$$\begin{aligned} \sigma_{ab} &= \frac{1}{M-1} \sum_{R=1}^M \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial a}{\partial y_i} (y_i^R - \bar{y}_i) \sum_{j=1}^N \frac{\partial b}{\partial y_j} (y_j^R - \bar{y}_j) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial a}{\partial y_i} \frac{\partial b}{\partial y_j} \left[\frac{1}{M-1} \sum_{R=1}^M (y_i^R - \bar{y}_i)(y_j^R - \bar{y}_j) \right] \end{aligned}$$

Podemos ver entonces que si todos los y_i son independientes, el producto

$$\frac{1}{M-1} \sum_{R=1}^M (y_i^R - \bar{y}_i)(y_j^R - \bar{y}_j) = \delta_{ij} \sigma_y^2$$

es decir,

$$\sigma_{ab} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial a}{\partial y_i} \frac{\partial b}{\partial y_i} \sigma_y^2$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

$$\sigma_{ab} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial a}{\partial y_i} \frac{\partial b}{\partial y_i} \sigma_y^2$$

$$a^* = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b^* = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

Es fácil ver que

$$\frac{\partial a}{\partial y_i} = \frac{\sum x^2 - x_i \sum x}{\Delta}$$
$$\frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{N x_i - \sum x}{\Delta}$$

$$\Delta = N \sum x^2 - (\sum x)^2$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

$$\sigma_{ab} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial a}{\partial y_i} \frac{\partial b}{\partial y_i} \sigma_y^2$$

$$a^* = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b^* = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

Es fácil ver que

$$\frac{\partial a}{\partial y_i} = \frac{\sum x^2 - x_i \sum x}{\Delta}$$
$$\frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{N x_i - \sum x}{\Delta}$$

$$\Delta = N \sum x^2 - (\sum x)^2$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial a}{\partial y_i} \frac{\partial b}{\partial y_i} = -\frac{\sum x}{\Delta}$$

Finalmente entonces,

$$\sigma_{ab} = -\frac{\sum x}{\Delta} \sigma_y^2$$

Esto implica que uno puede calcular la covarianza σ_{ab} con una *única* medición y por lo tanto una única determinación de a y b.

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

Cuál es la relevancia de este resultado?.

Supongamos tener un ajuste lineal de la forma $y = a + bx$, y con esto queremos inter o extrapolar el valor $y_0 = a + bx_0$. La pregunta es cuánto vale la incerteza de y_0 ?

y la respuesta es $\sigma_{y_0}^2 = \sigma_a^2 + x_0^2 \sigma_b^2 + 2x_0 \sigma_{ab}$

con $\sigma_{ab} = -\frac{\sum x}{\Delta} \sigma_y^2$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

Cuál es la relevancia de este resultado?

Supongamos tener un ajuste lineal de la forma $y = a + bx$, y con esto queremos inter o
extrapolar el valor $y_0 = a + bx_0$. La pregunta es cuánto vale la incerteza de y_0 ?

y la respuesta es $\sigma_{y_0}^2 = \sigma_a^2 + x_0^2 \sigma_b^2 + 2x_0 \sigma_{ab}$

con $\sigma_{ab} = -\frac{\sum x}{\Delta} \sigma_y^2$

