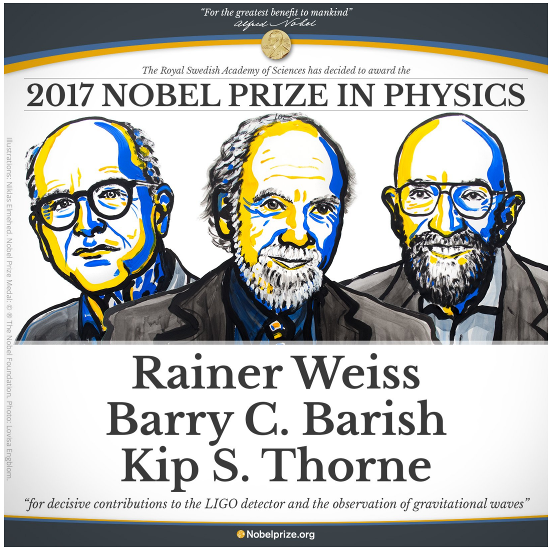
Física Experimental / Laboratorio I

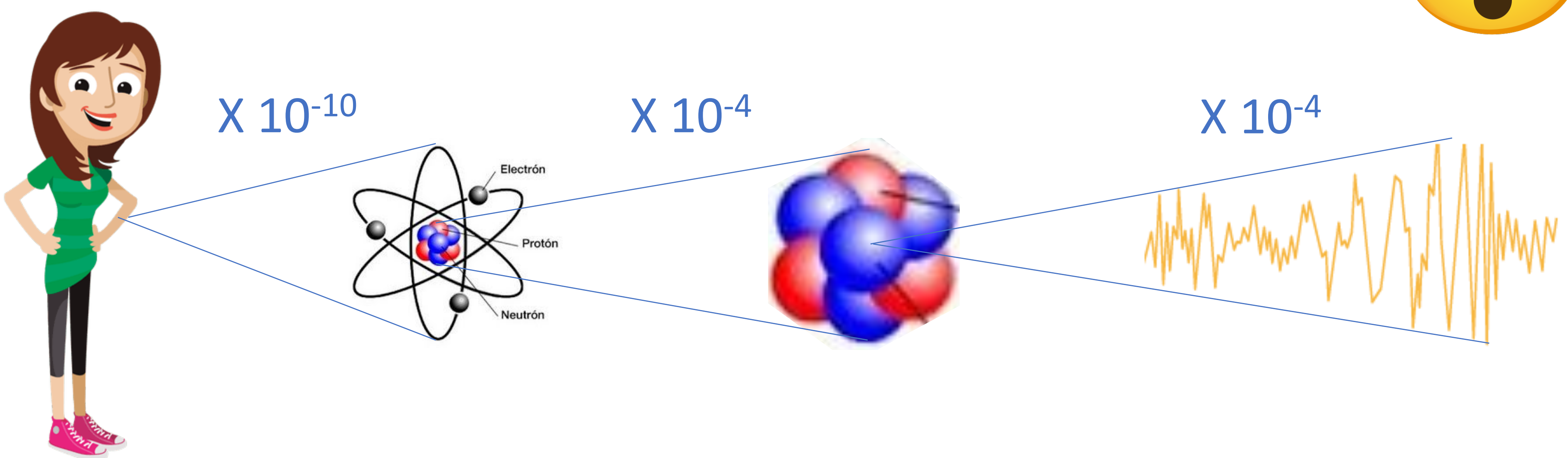
Clase #4



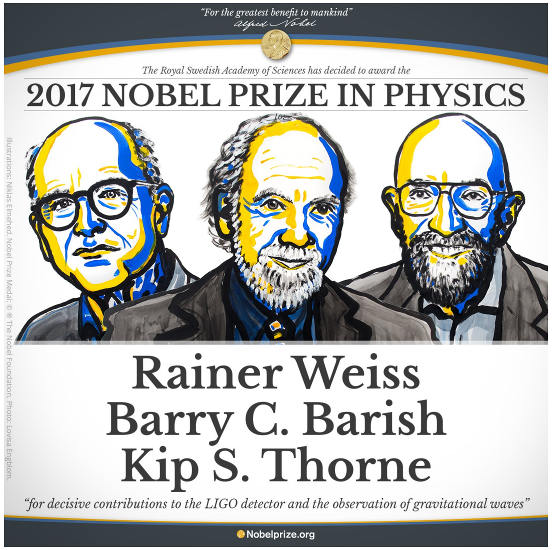
LIGO: Linear Interferometer Gravitational Observatory

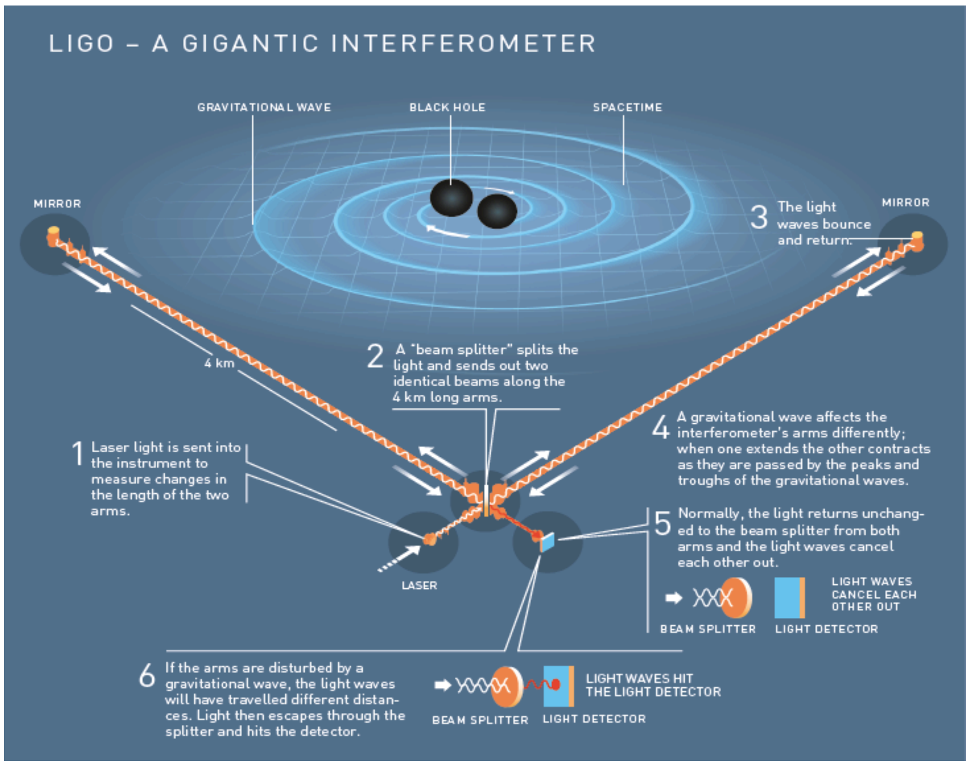
Comentario escéptico hecho por Arthur Stanley Eddington en 1922:"gravitational waves propagate at the speed of thought."

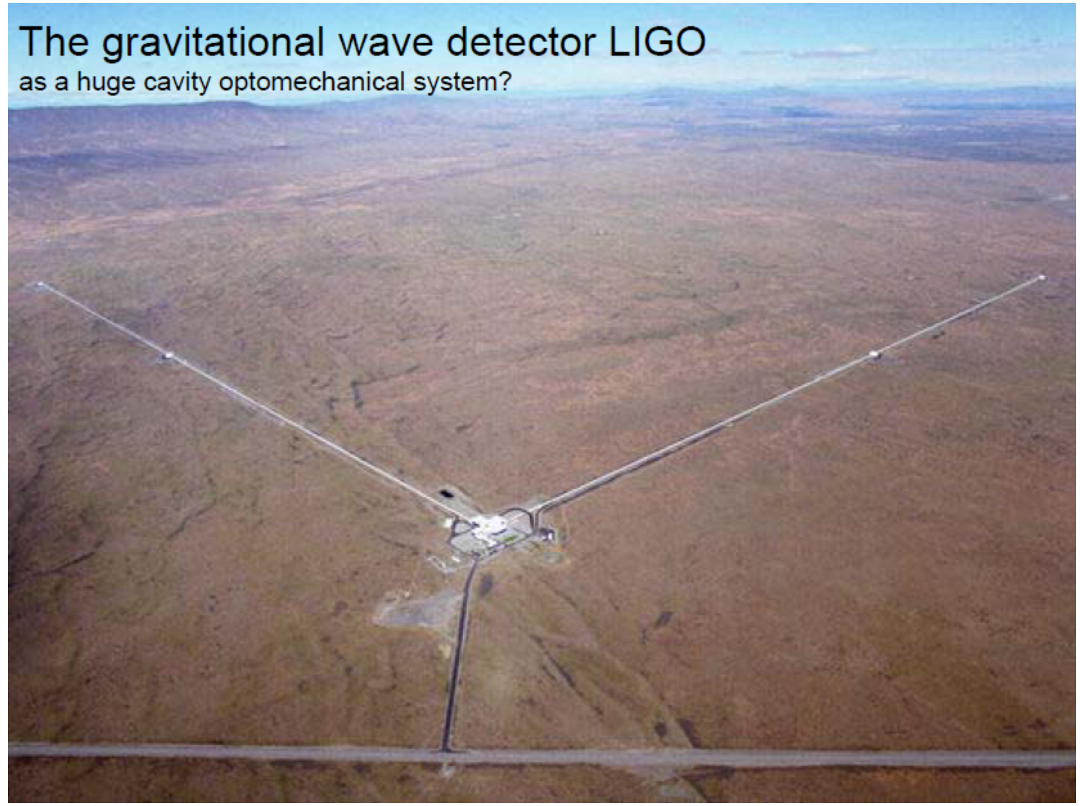
Resolución necesaria: diámetro de un pelo en 10 años luz

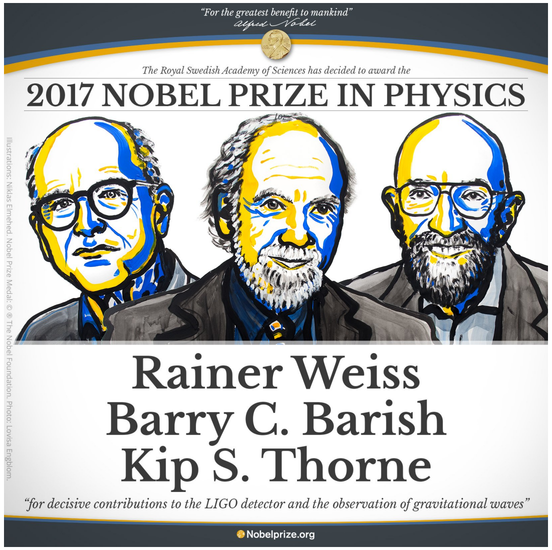


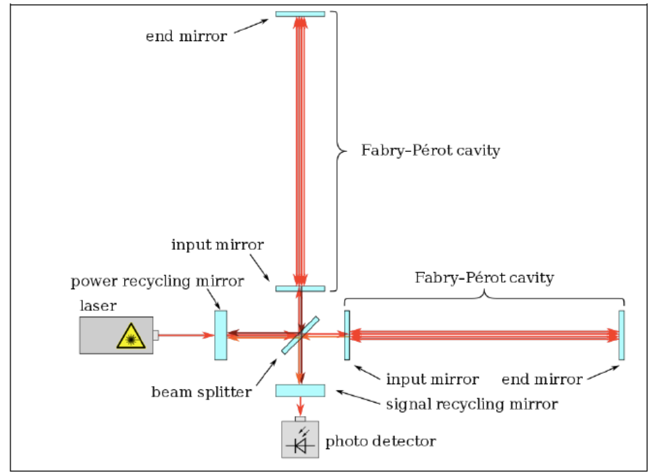
~ 1m   ~ 10^{-10}m   ~ 10^{-14}m $\boxed{\sim 10^{-18}\text{m}}$

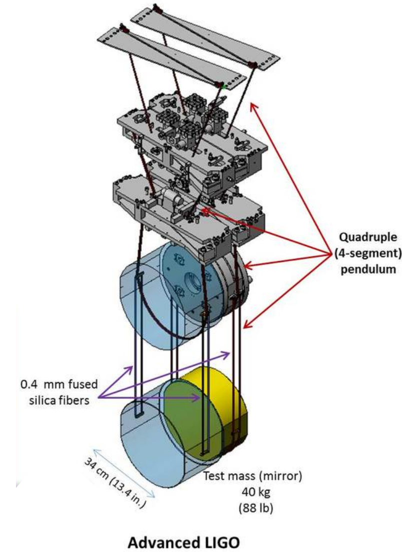

"For the greatest benefit to mankind"
The Royal Swedish Academy of Sciences has decided to award the
2017 NOBEL PRIZE IN PHYSICS
Rainer Weiss
Barry C. Barish
Kip S. Thorne
"for decisive contributions to the LIGO detector and the observation of gravitational waves"
Nobelprize.org

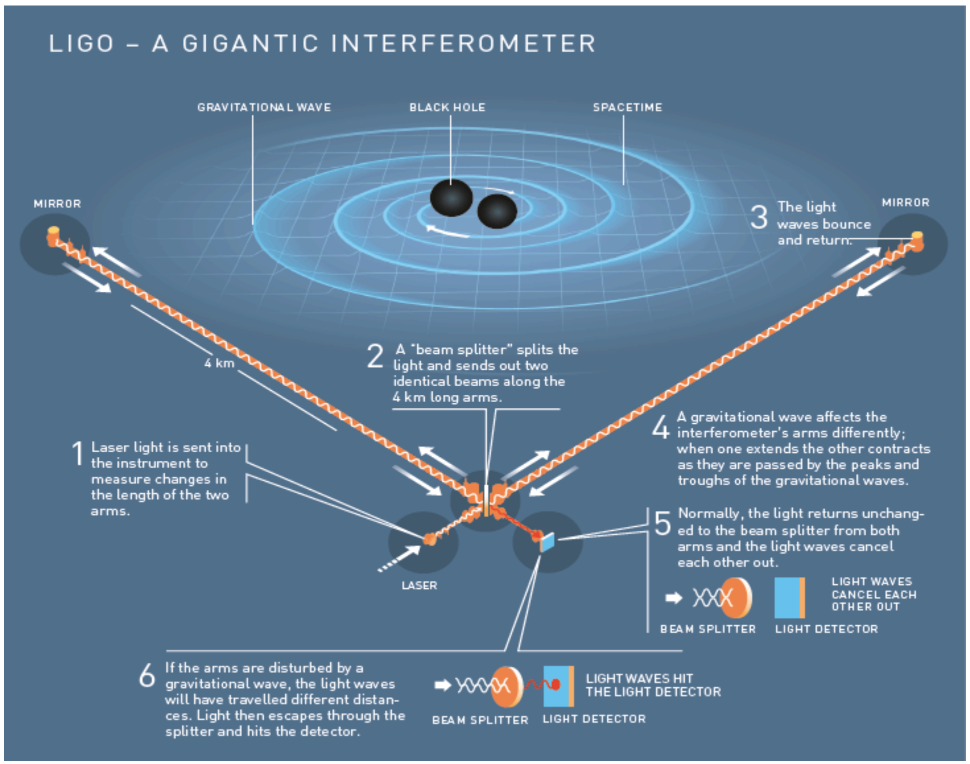

LIGO – A GIGANTIC INTERFEROMETER
GRAVITATIONAL WAVE
BLACK HOLE
SPACETIME
MIRROR
MIRROR
3 The light waves bounce and return.
4 km
2 A "beam splitter" splits the light and sends out two identical beams along the 4 km long arms.
4 A gravitational wave affects the interferometer's arms differently; when one extends the other contracts as they are passed by the peaks and troughs of the gravitational waves.
1 Laser light is sent into the instrument to measure changes in the length of the two arms.
5 Normally, the light returns unchanged to the beam splitter from both arms and the light waves cancel each other out.
LASER
LIGHT WAVES CANCEL EACH OTHER OUT
BEAM SPLITTER
LIGHT DETECTOR
6 If the arms are disturbed by a gravitational wave, the light waves will have travelled different distances. Light then escapes through the splitter and hits the detector.
LIGHT WAVES HIT THE LIGHT DETECTOR
BEAM SPLITTER
LIGHT DETECTOR


The gravitational wave detector LIGO
as a huge cavity optomechanical system?









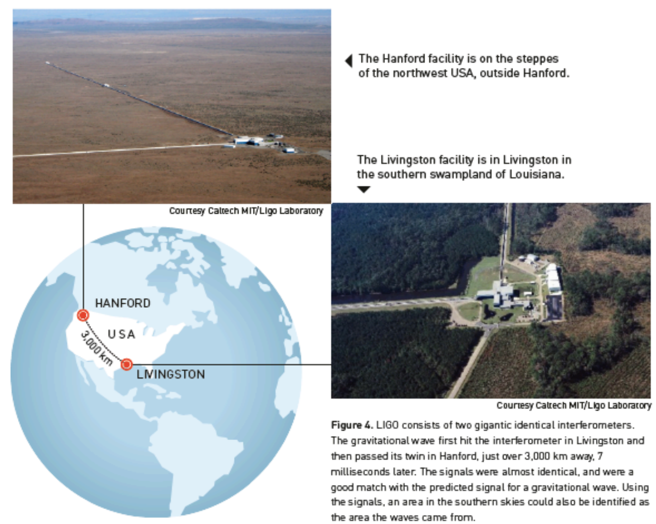
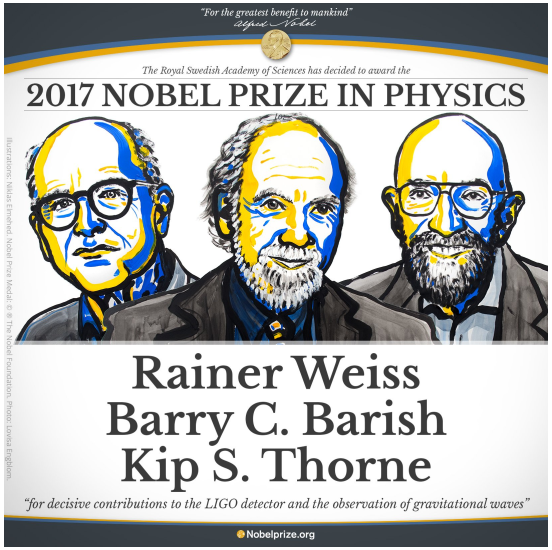


Figure 4. LIGO consists of two gigantic identical interferometers. The gravitational wave first hit the interferometer in Livingston and then passed its twin in Hanford, just over 3,000 km away, 7 milliseconds later. The signals were almost identical, and were a good match with the predicted signal for a gravitational wave. Using the signals, an area in the southern skies could also be identified as the area the waves came from.



40 años de progreso en ciencia y tecnología!

PHYSICAL REVIEW LETTERS

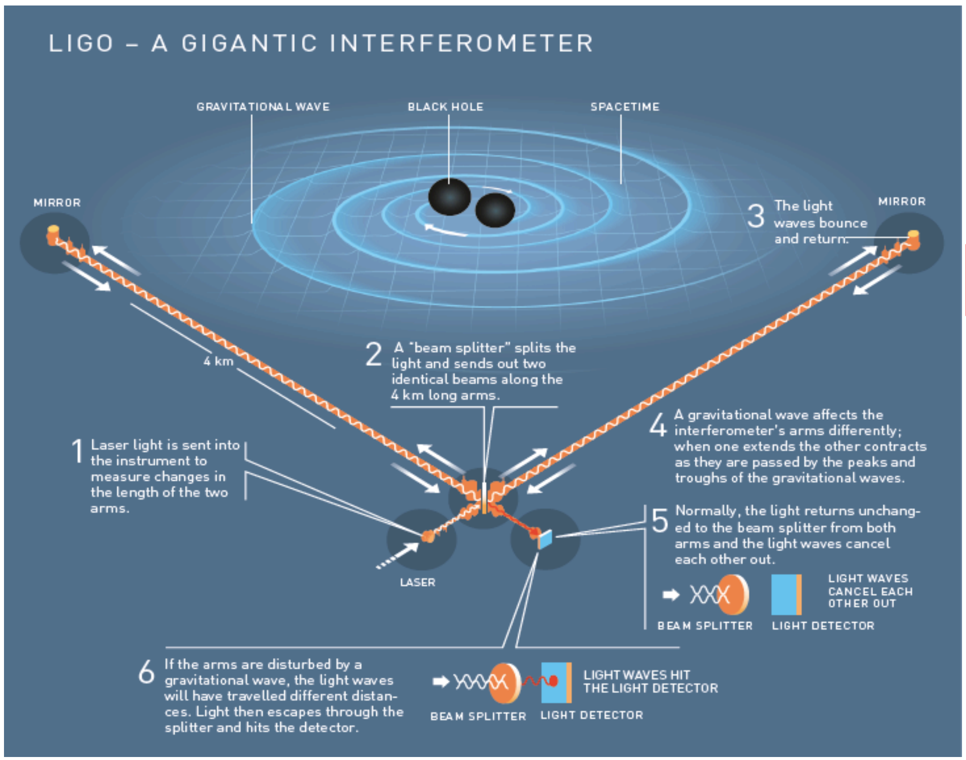
VOLUME 45 | 14 JULY 1980 | NUMBER 2

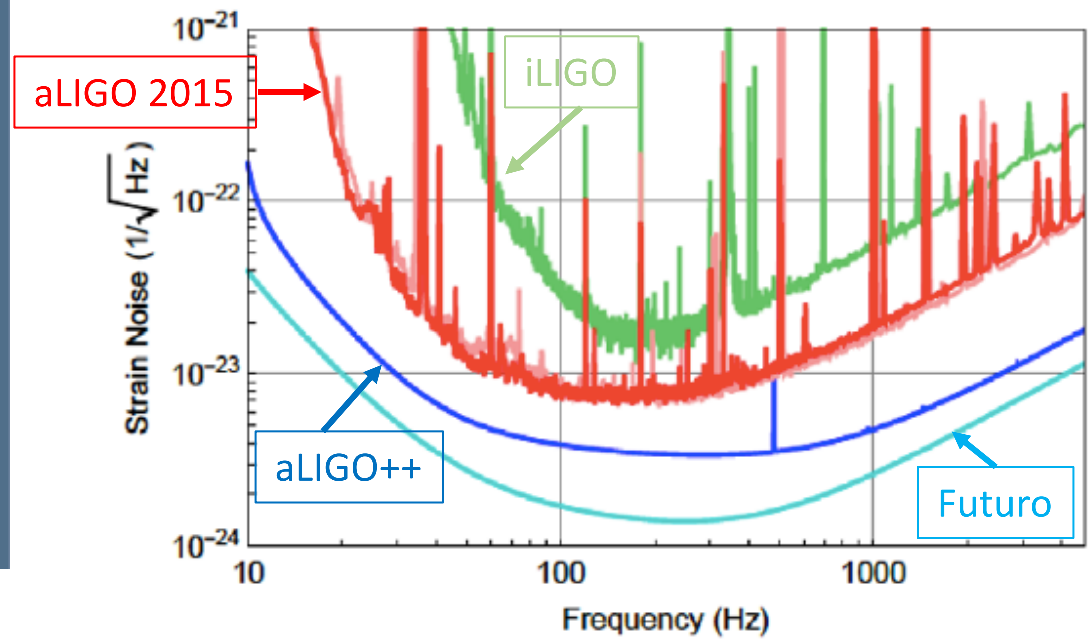
Quantum-Mechanical Radiation-Pressure Fluctuations in an Interferometer

Carlton M. Caves
W. K. Kellogg Radiation Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California 91125

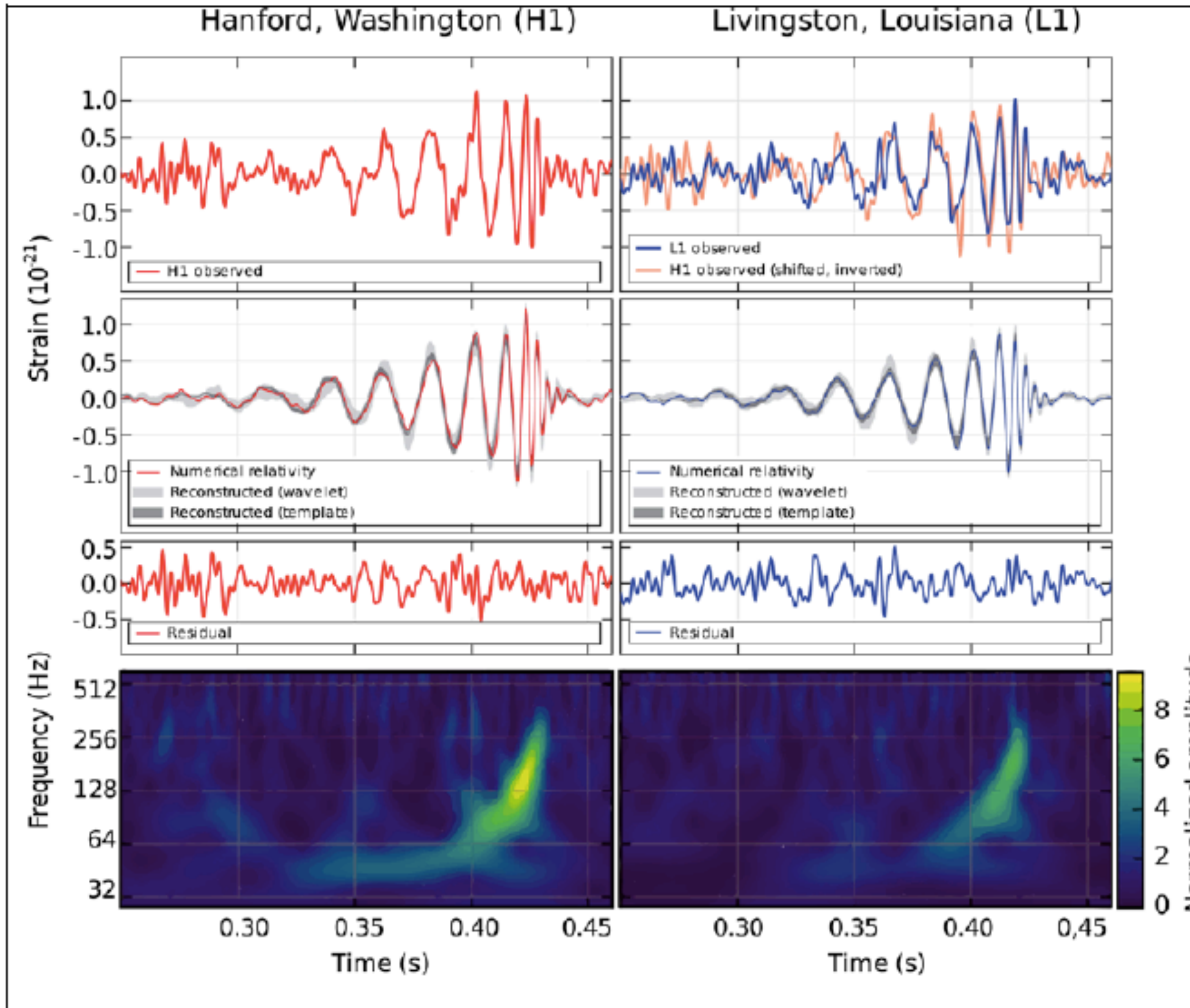
(Received 29 January 1980)

The interferometers now being developed to detect gravitational vaves work by measuring small changes in the positions of free masses. There has been a controversy whether quantum-mechanical radiation-pressure fluctuations disturb this measurement. This Letter resolves the controversy: They do.





Y el 14 de septiembre de 2015, 11:51am en Hannover, Marco Drago un postdoc fue el primero en observar….



Ajuste por cuadrados mínimos “pesados”

Si suponemos que todos los σ_i asociados a los distintos y_i *no son iguales*,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_i^2}$$

y definimos “pesos” dados por $w_i = 1/\sigma_i^2$, entonces se puede demostrar que:

$$\boxed{A = \frac{\sum wx^2 \sum wy - \sum wx \sum wxy}{\Delta}}$$

$$\boxed{B = \frac{\sum w \sum wxy - \sum wx \sum wy}{\Delta}}$$

con

$$\boxed{\Delta = \sum w \sum wx^2 - \left(\sum wx\right)^2}$$

Ajuste por cuadrados mínimos "pesados"

Si suponemos que todos los σ_i asociados a los distintos y_i *no son iguales*,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_i^2}$$

y definimos "pesos" dados por $w_i = 1/\sigma_i^2$, entonces se puede demostrar que:

$$\boxed{A = \frac{\sum wx^2 \sum wy - \sum wx \sum wxy}{\Delta}}$$

$$\boxed{B = \frac{\sum w \sum wxy - \sum wx \sum wy}{\Delta}}$$

con

$$\boxed{\Delta = \sum w \sum wx^2 - \left(\sum wx\right)^2}$$

Las correspondientes incertezas de los estimadores de A y B en este caso son:

$$\boxed{\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum wx^2}{\Delta}}}$$

$$\boxed{\sigma_B = \sqrt{\frac{\sum w}{\Delta}}}$$

Notar que en este caso será necesario contar con un método alternativo para determinar los correspondientes σ_i.

Recta por el origen

En este caso con $y = Bx$, se puede demostrar fácilmente que

$$B = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

Por otro lado,

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum (y_i - Bx_i)^2}$$

y

$$\sigma_B = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum x^2}}$$

Ajuste por cuadrados mínimos: otras funciones

Consideramos por ejemplo un polinomio $y = A + Bx + Cx^2 + ... + Hx^n$

y contamos con un conjunto de mediciones (x_i, y_i), con i = 1, …, N, podemos seguir el mismo procedimiento del ajuste lineal para obtener:

$$Prob(y_1, ..., y_N) \propto \frac{1}{\sigma_y^N} e^{-\chi^2/2}$$

Con el correspondiente "chi cuadrado"

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - A - Bx_i - Cx_i^2 - ... - Hx_i^n)^2}{\sigma_y^2}$$

Ajuste por cuadrados mínimos: otras funciones

Consideramos por ejemplo un polinomio $y = A + Bx + Cx^2 + \dots + Hx^n$

y contamos con un conjunto de mediciones (x_i, y_i), con i = 1, …, N, podemos seguir el mismo procedimiento del ajuste lineal para obtener:

$$Prob(y_1, \dots, y_N) \propto \frac{1}{\sigma_y^N} e^{-\chi^2/2}$$

Con el correspondiente "chi cuadrado"

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - A - Bx_i - Cx_i^2 - \dots - Hx_i^n)^2}{\sigma_y^2}$$

Ajuste por cuadrados mínimos: otras funciones

Consideramos por ejemplo un polinomio $y = A + Bx + Cx^2 + ... + Hx^n$

y contamos con un conjunto de mediciones (x_i, y_i), con i = 1, …, N, podemos seguir el mismo procedimiento del ajuste lineal para obtener:

$$Prob(y_1, ..., y_N) \propto \frac{1}{\sigma_y^N} e^{-\chi^2/2}$$

Con el correspondiente “chi cuadrado”

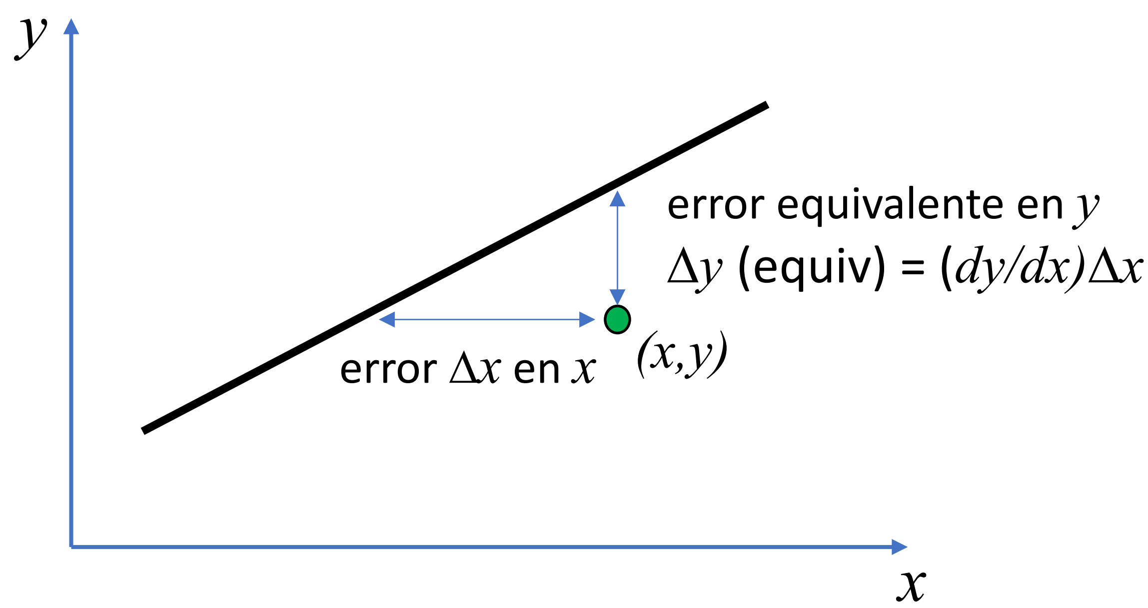
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - A - Bx_i - Cx_i^2 - ... - Hx_i^n)^2}{\sigma_y^2}$$

Aplicando el principio de máxima verosimilitud, y diferenciando χ^2 respecto a las constantes A, B, C, …, H, se obtiene un sistema de ecuaciones *lineales* para obtener los estimadores de las mismas.

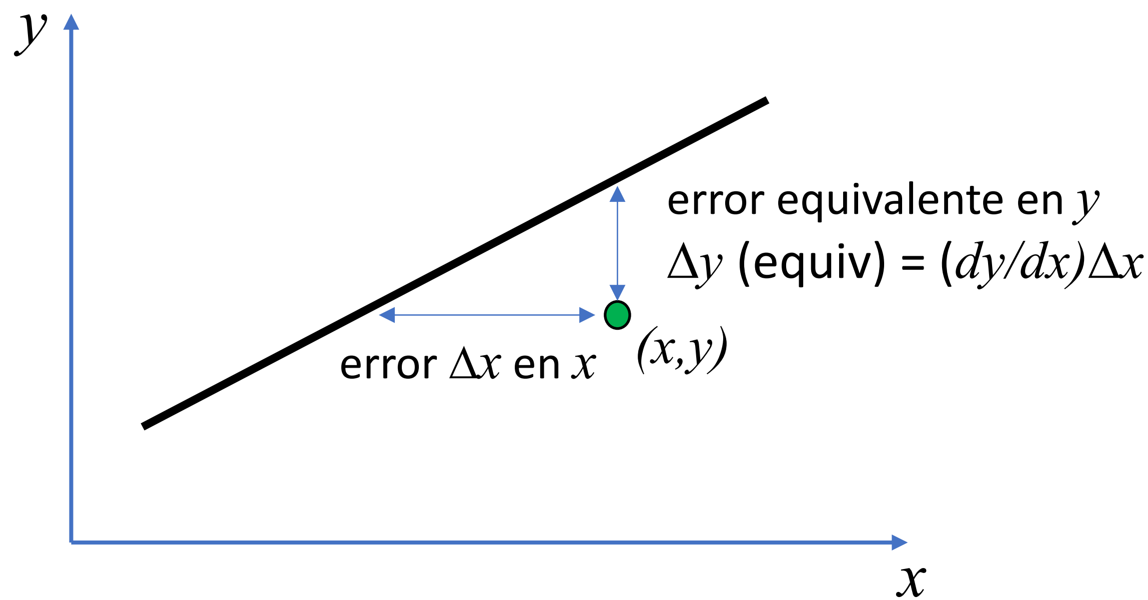
No importa cuáles son las funciones de x (podrían ser funciones trigononométricas), sino que la función buscada debe ser lineal en los parámetros A_i para poder aplicar el mismo método.

Lo mismo aplica para funciones de varias variables (como $z = A + Bx + Cy$ dados conjuntos de valores (x_i, y_i, z_i), con $i = 1, ..., N$) mientras estas sean lineales en los parámetros A_i.

Qué hacer cuando hay error en x además de y



Qué hacer cuando hay error en x además de y



Si suponemos que la variable x tiene incertezas, e y no, se puede definir una incerteza "equivalente" para y de la forma $\Delta y(equiv) = (dy/dx)\Delta x$.

Para el caso en que se trate de una recta $y = A + Bx$, entonces $\Delta y(equiv) = B\Delta x$. En el caso más general en el que ambos x e y tengan incertezas, entonces

$$\sigma_y(equiv) = \sqrt{\sigma_y^2 + (B\sigma_x)^2}$$

Cuando la función es exponencial

Supongamos $y = A\, e^{Bx}$, con A y B constantes.

Por ejemplo: la intensidad de radiación I luego de propagarse una longitud x en un medio absorbente es $I = I_0\, e^{-\mu x}$, con I_0 la intensidad inicial y μ el parámetro que caracteriza la absorción del medio.

La aplicación del método propuesto lleva a ecuaciones para A y B que no se pueden resolver directamente. Se puede sin embargo escribir

$$z = \ln y = \ln A + Bx$$

Cuando la función es exponencial

Supongamos $y = A\, e^{Bx}$, con A y B constantes.

Por ejemplo: la intensidad de radiación I luego de propagarse una longitud x en un medio absorbente es $I = I_0\, e^{-\mu x}$, con I_0 la intensidad inicial y μ el parámetro que caracteriza la absorción del medio.

La aplicación del método propuesto lleva a ecuaciones para A y B que no se pueden resolver directamente. Se puede sin embargo escribir

$$z = \ln y = \ln A + Bx$$

Notar sin embargo que estrictamente no hay motivos para suponer que los errores en z son todos iguales. En particular si los errores en y son independientes de x, resulta

$$\sigma_z = \left|\frac{dz}{dy}\right| \sigma_y = \frac{\sigma_y}{y}$$

En este caso se puede usar la versión "pesada" del ajuste por cuadrados mínimos. O, si tampoco se puede suponer que los σ_y sean iguales, se puede aplicar el ajuste usual que, aunque no sea el óptimo, será razonable.

Coeficiente de correlación

La medida en la que un dado conjunto de puntos $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ responde a una relación entre x e y se refleja en el coeficiente de correlación:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

que se puede escribir también como

$$r = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2 (y_i - \overline{y})^2}}$$

Notemos que la desigualdad de Schwartz implica $|\sigma_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$, de donde $|r| \leq 1$.

Coeficiente de correlación lineal

$$r = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \overline{x})^2(y_i - \overline{y})^2}}$$

Si todos los puntos (x_i, y_i) caen exactamente en la recta $y = A + Bx$, entonces $y_i = A + Bx_i$, y $\overline{y} = A + B\overline{x}$, de donde

$$r = \frac{B\sum(x_i - \overline{x})^2}{\sqrt{\sum(x_i - \overline{x})^2 B^2 (x_i - \overline{x})^2}} = \frac{B}{|B|} = \pm 1$$

Es decir, en este caso $r = \pm 1$ con el signo determinado por la pendiente de la recta ($r = 1$ para B positivo y $r = -1$ si es negativo).

Si ***no hay*** una relación lineal, la suma cruzada en el numerador tendrá signos alternados, mientras que las del denominador son siempre positivas, y por lo tanto $r \to 0$ si $N \to \infty$.

Coeficiente de correlación

Con un número finito de datos se puede esperar que r sea pequeño, pero no necesariamente $r \sim 0$. Esto se puede cuantificar evaluando la probabilidad de que N mediciones de variables x e y que *no están* correlacionadas den lugar a un coeficiente de correlación r mayor que un cierto número:

$$Prob_N(|r| \geq r_o)$$

Coeficiente de correlación

Con un número finito de datos se puede esperar que r sea pequeño, pero no necesariamente $r \sim 0$. Esto se puede cuantificar evaluando la probabilidad de que N mediciones de variables x e y que *no están* correlacionadas den lugar a un coeficiente de correlación r mayor que un cierto número:

$$Prob_N(|r| \geq r_o)$$

						r_o					
N	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
3	100	94	87	81	74	67	59	51	41	29	0
6	100	85	70	56	43	31	21	12	6	1	0
10	100	78	58	40	25	14	7	2	0.5		0
20	100	67	40	20	8	2	0.5	0.1			0
50	100	49	16	3	0.4						0

Datos en blanco son valores menores a 0.05%. Se dice que una correlación es "significativa" si esta probabilidad es menor al 5%. Y es "altamente significativa" si es menor a 1%.

Coeficiente de correlación lineal

Para el caso lineal $f(x_i) = A + Bx_i$ también se define el coeficiente de correlación **lineal** como:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum [y_i - f(x_i)]^2}{\sum (y_i - \overline{y})^2} = r^2$$

Ahora, dado un conjunto de puntos $(x_1, y_1),\ldots, (x_N, y_N)$, r^2 es una medida de cuan bueno es el ajuste lineal?

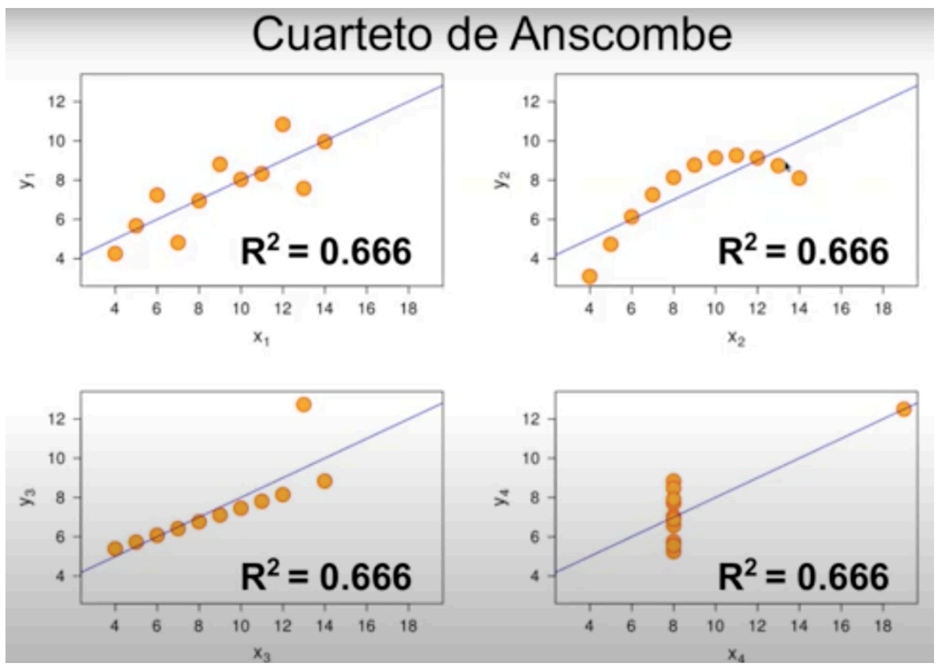
Coeficiente de correlación lineal

Para el caso lineal $f(x_i) = A + Bx_i$ también se define el coeficiente de correlación lineal como:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum [y_i - f(x_i)]^2}{\sum (y_i - \overline{y})^2} = r^2$$

Ahora, dado un conjunto de puntos $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$, r^2 es una medida de cuan bueno es el ajuste lineal?

NO



Tomado de Wikipedia

Coeficiente de correlación lineal

Para el caso lineal $f(x_i) = A + Bx_i$ también se define el coeficiente de correlación lineal como:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum\left[y_i - f(x_i)\right]^2}{\sum\left(y_i - \overline{y}\right)^2} = r^2$$

Ahora, dado un conjunto de puntos $(x_1, y_1),\ldots, (x_N, y_N)$, r^2 es una medida de cuan bueno es el ajuste lineal?

NO

Qué hacer entonces?

1) Mirar siempre los residuos (!), $\Delta_i = y_i - f(x_i) = y_i - A + Bx_i$

2) χ^2 .... Fuera del alcance del curso.

Distribución de Poisson

Describe la probabilidad de eventos que ocurren de manera random, pero con una tasa promedio definida. Por ejemplo, el conteo de partículas producidas por decaimiento radioactivo de una muestra en una dado intervalo de tiempo. Se puede demostrar que esta probabilidad está dada por:

$$P_{\mu}(\nu) = e^{-\mu}\frac{\mu^{\nu}}{\nu!}$$

que representa la probabilidad de ν cuentas en una dado intervalo de tiempo. En esta definición $\mu > 0$.

Distribución de Poisson

Describe la probabilidad de eventos que ocurren de manera random, pero con una tasa promedio definida. Por ejemplo, el conteo de partículas producidas por decaimiento radioactivo de una muestra en una dado intervalo de tiempo. Se puede demostrar que esta probabilidad está dada por:

$$P_\mu(\nu) = e^{-\mu} \frac{\mu^\nu}{\nu!}$$

que representa la probabilidad de ν cuentas en una dado intervalo de tiempo. En esta definición $\mu > 0$.

El número medio de cuentas $\overline{\nu}$ es:

$$\overline{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu P_\mu(\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu e^{-\mu} \frac{\mu^\nu}{\nu!}$$

El primer término es cero, y entonces $\nu/\nu!$ puede reemplazarse por $1/(\nu-1)!$. Entonces

$$\overline{\nu} = \mu e^{-\mu} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu^{\nu-1}}{(\nu-1)!} = \mu$$

Distribución de Poisson

La desviación estandard por otro lado es

$$\sigma_\nu^2 = \overline{(\nu - \overline{\nu})^2} = \overline{\nu^2} - (\overline{\nu})^2$$

Ya vimos que $\overline{\nu} = \mu$, y una cuenta similar muestra que $\overline{\nu^2} = \mu^2 + \mu$. Entonces,

$$\sigma_\nu = \sqrt{\mu}$$

Distribución de Poisson

La desviación estandard por otro lado es

$$\sigma_\nu^2 = \overline{(\nu - \overline{\nu})^2} = \overline{\nu^2} - (\overline{\nu})^2$$

Ya vimos que $\overline{\nu} = \mu$, y una cuenta similar muestra que $\overline{\nu^2} = \mu^2 + \mu$. Entonces,

$$\sigma_\nu = \sqrt{\mu}$$

Por lo tanto, si medimos una sola vez el número de eventos en un dado tiempo ν, la mejor estimación para el conteo estimado en ese intervalo de tiempo $\nu \pm \sqrt{\nu}$.

Distribución de Poisson

La desviación estandard por otro lado es

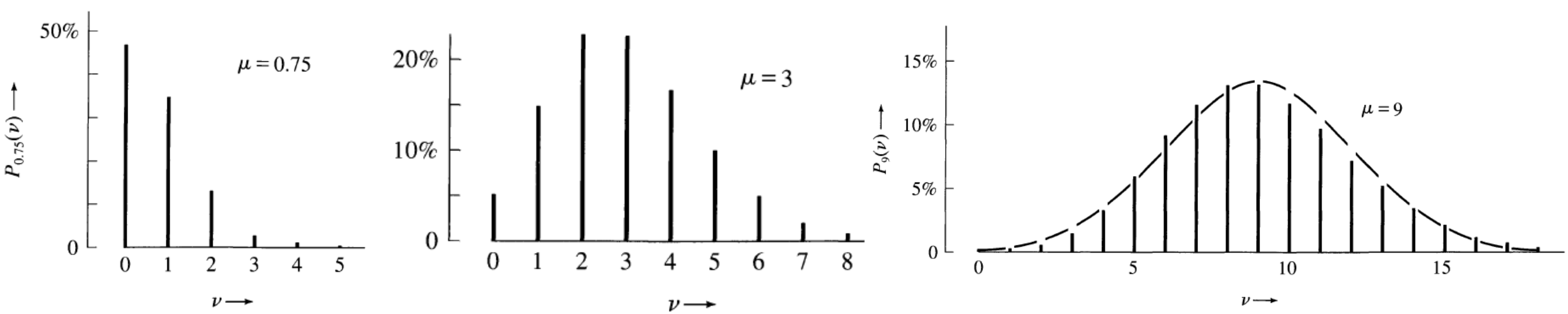
$$\sigma_\nu^2 = \overline{(\nu - \overline{\nu})^2} = \overline{\nu^2} - (\overline{\nu})^2$$

Ya vimos que $\overline{\nu} = \mu$, y una cuenta similar muestra que $\overline{\nu^2} = \mu^2 + \mu$. Entonces,

$$\sigma_\nu = \sqrt{\mu}$$

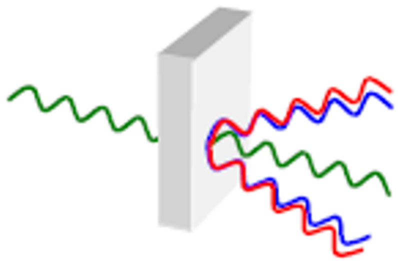
Por lo tanto, si medimos una sola vez el número de eventos en un dado tiempo ν, la mejor estimación para el conteo estimado en ese intervalo de tiempo $\nu \pm \sqrt{\nu}$.

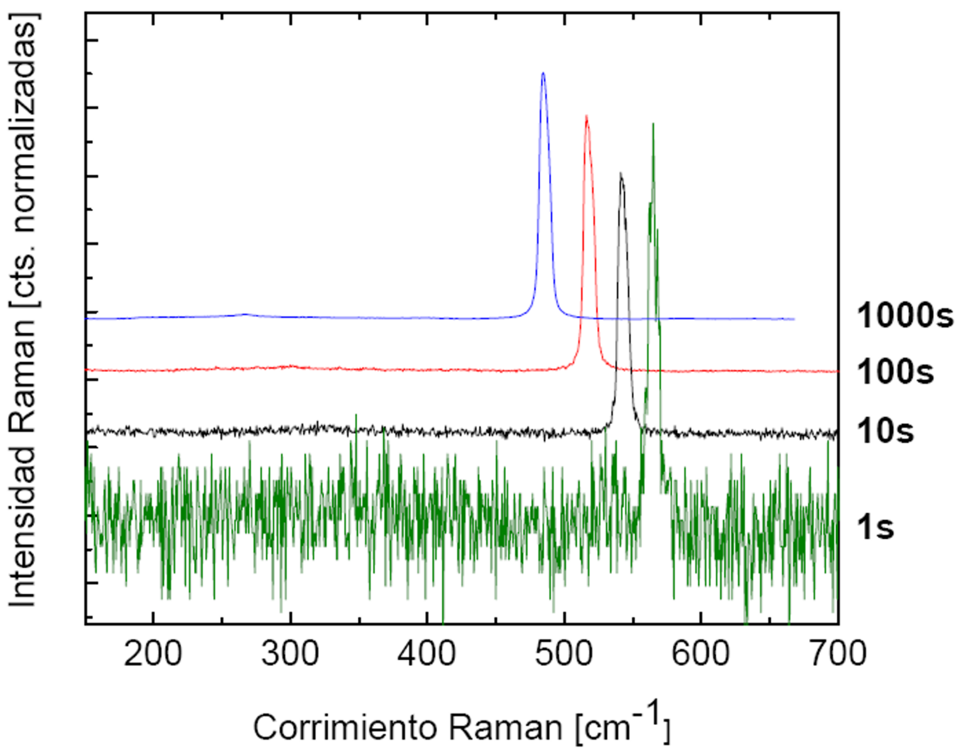
Si bien la distribución de Poisson y la de Gauss son diferentes, la primera solo toma valores enteros de la variable y a diferencia de la segunda se describe con un único parámetro μ, resulta ser que $P_\mu(\nu) \approx G_{X,\sigma}(\nu)$ cuando μ es grande, tomando $X = \mu$ y $\sigma = \sqrt{\mu}$.



Estadística de Poisson: el origen cuántico de dispersión inelástica de luz

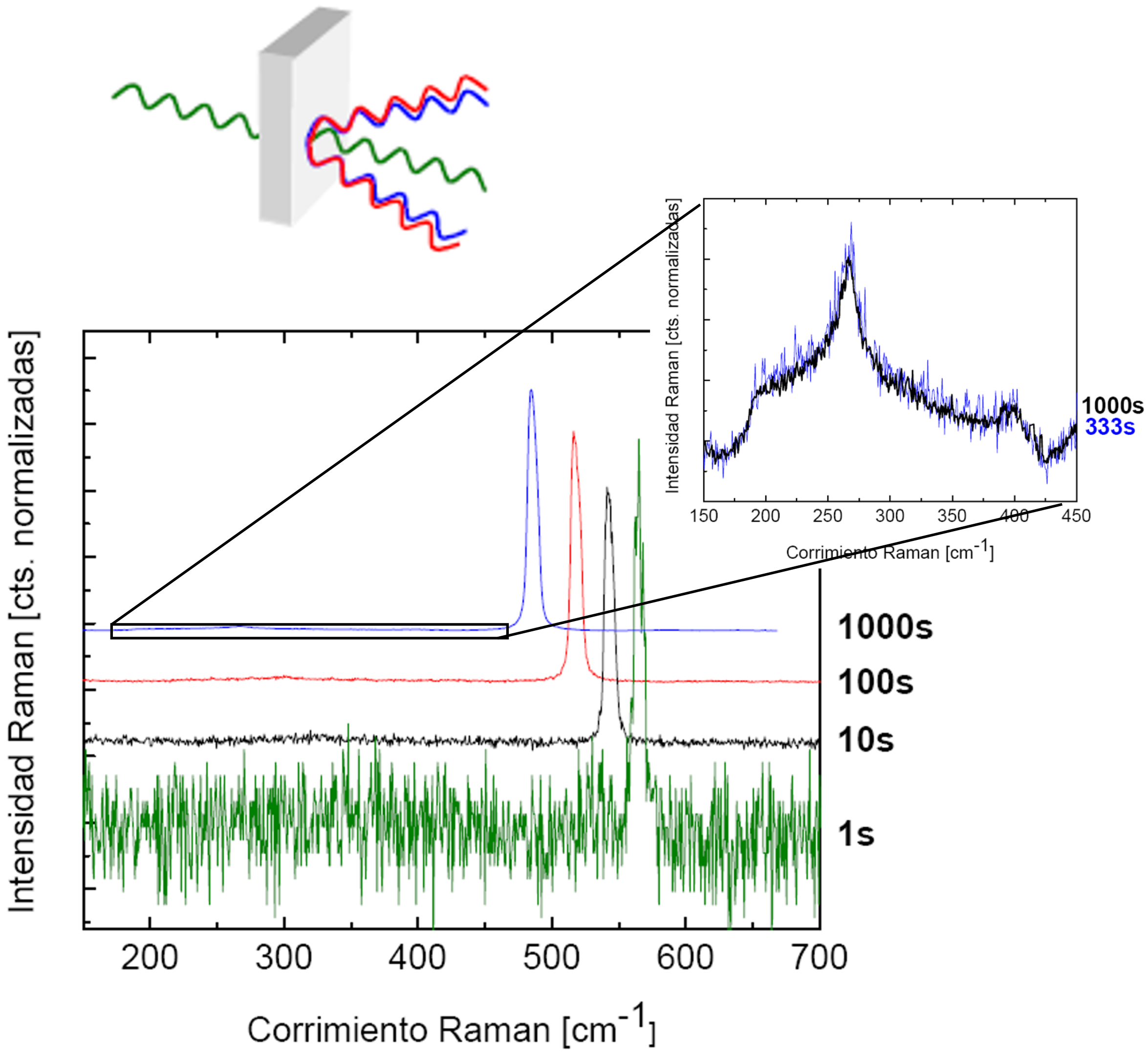
Dispersión de luz (Rayleigh+Raman)





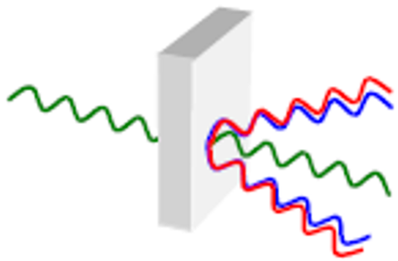
Estadística de Poisson: el origen cuántico de dispersión inelástica de luz

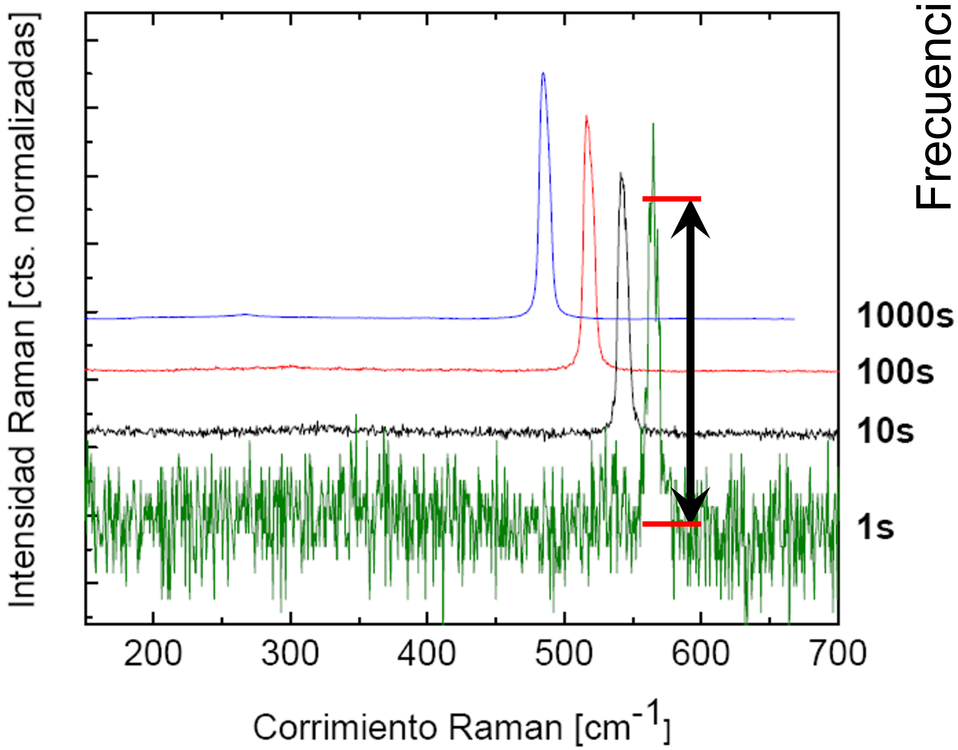
Dispersión de luz (Rayleigh+Raman)



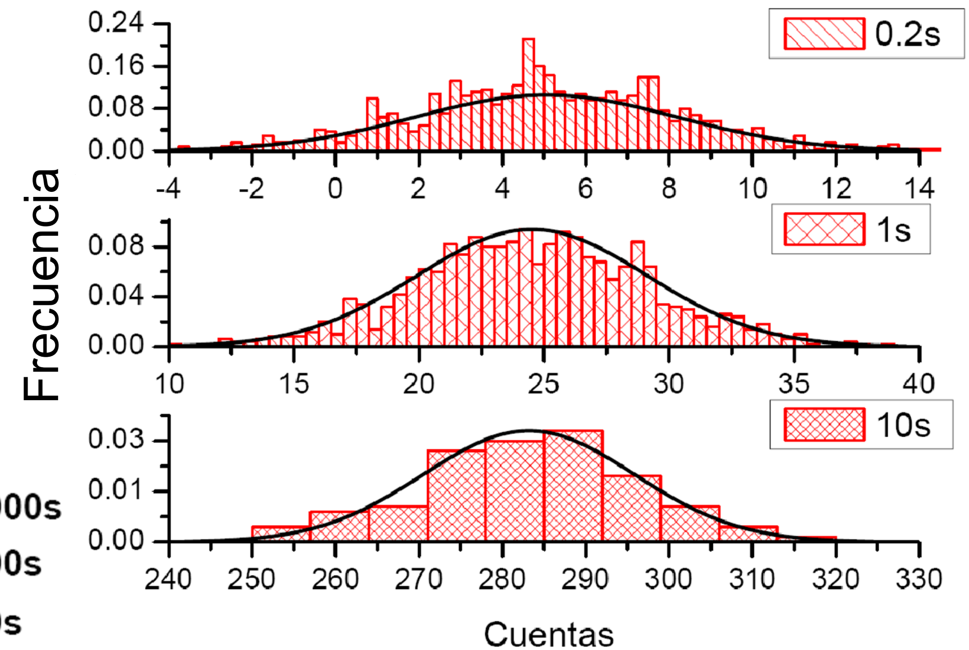
Estadística de Poisson: el origen cuántico de dispersión inelástica de luz

Dispersión de luz (Rayleigh+Raman)



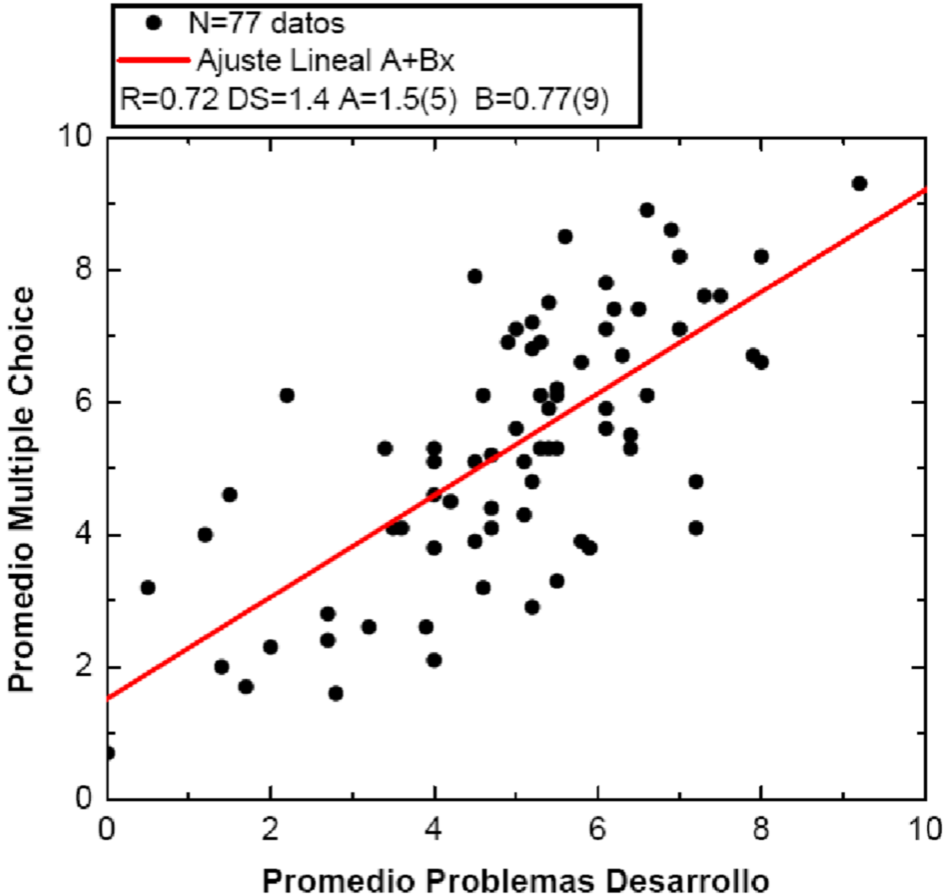


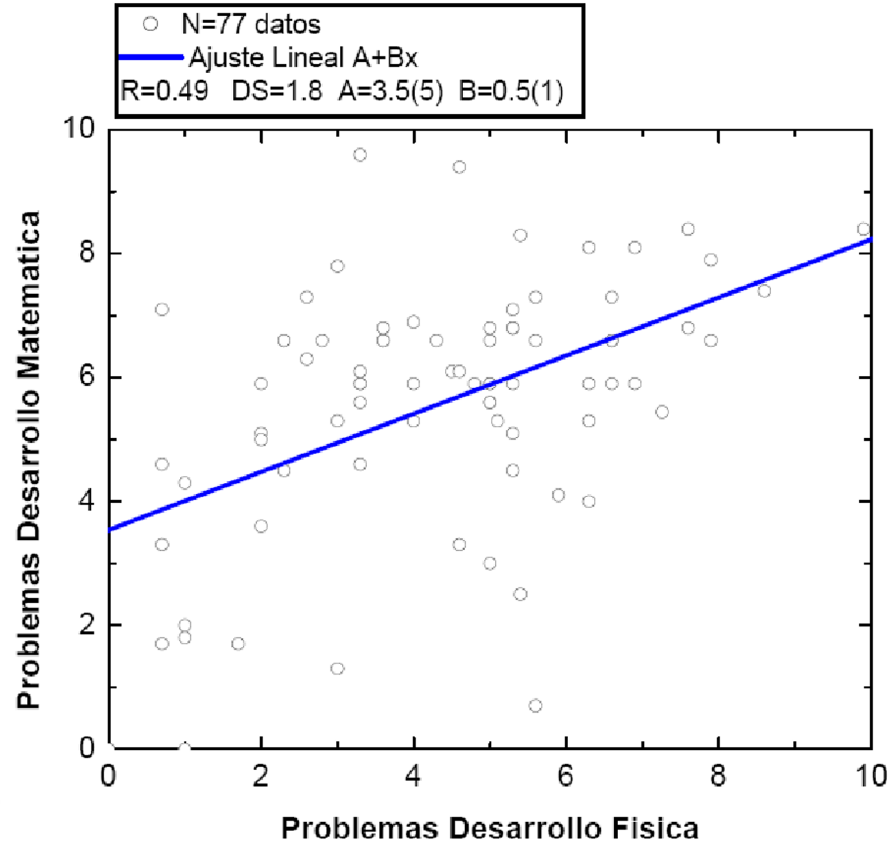
Estadística de Poisson



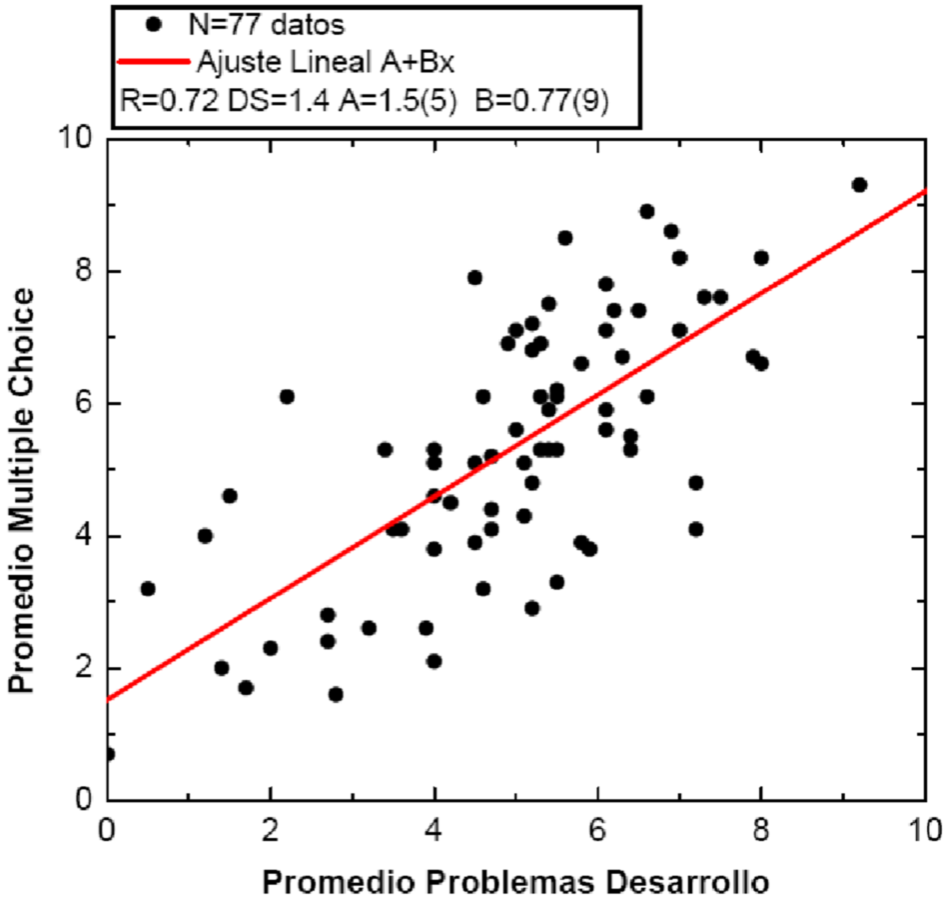
$$x_{est} = \nu \qquad \sigma = \sqrt{\nu}$$

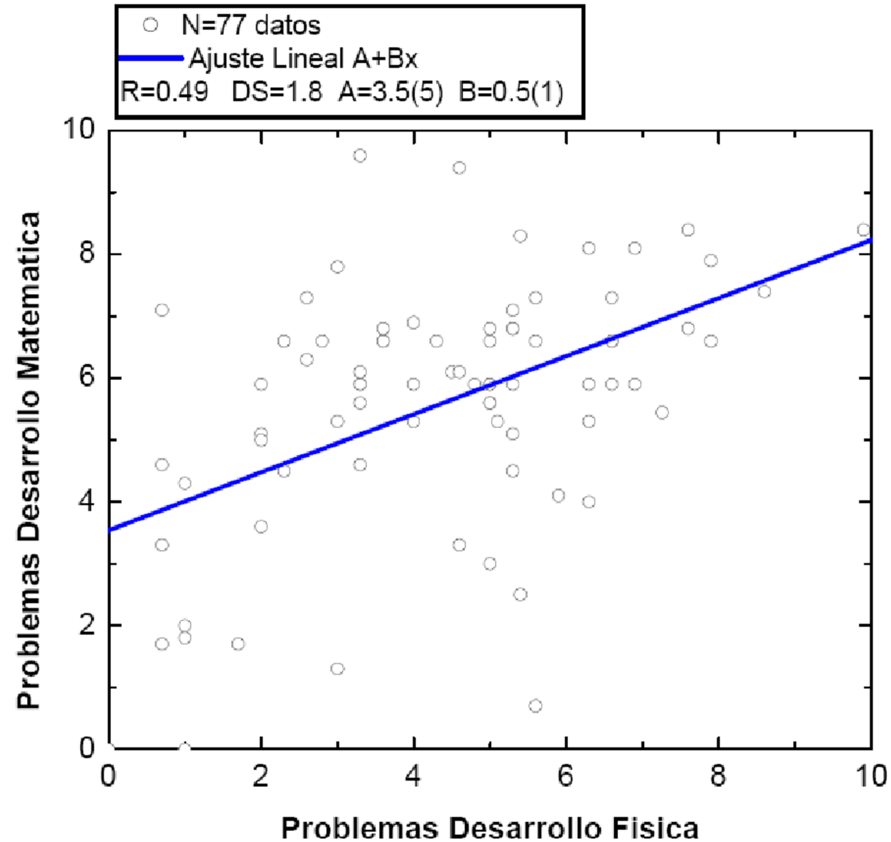
Correlación de datos en estudios sociales





Correlación de datos en estudios sociales





	r_o									
N	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
70	100	68	41	22	9.7	3.7	1.2	0.3	0.1	
80	100	66	38	18	7.5	2.5	0.7	0.1		