Apantallamiento magético: estudio de la respuesta del skin depth en frecuencia para el cobre

Maximiliano Baldiviezo - Emanuel A. Benatti
Instituto Balseiro
15 de Marzo 2010

En este trabajo se midió la respuesta en frecuencia para el skin depth del cobre dentro del rango de 100 Hz a 13 kHz. Se encontraron importantes discrepancias entre las predicciones teóricas y los resultados experimentales. Se pudo explicar tal diferencia en términos de factores geométricos del experimento, obteniéndose además, a partir de dicho modelo, un coeficiente de corrección consistente con el mismo, aunque no se logró medirlo experimentalmente.

I. INTRODUCCIÓN

Cuando un conductor se sumerge en un campo magnético variable, se inducen en el mismo corrientes que tienden a apantallar dicho campo magnético, es decir, el campo disminuye su intensidad de forma exponencial a medida que penetra dentro del conductor. Puede demostrarse a partir de las ecuaciones del Maxwell y la ley de Ohm, que si el cociente $\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} >> 1$ (como es el caso de un buen conductor), el campo magnético se propaga como una onda plana e incide en un plano de material conductor, tal campo se atenúa un 67 % a la distancia[1]:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma}} \tag{1}$$

siendo $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7} N/A^2$ la permeabilidad del vacío, $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular de la onda y σ la conductividad del material en cuestión. A la cantidad δ se le denomina "skin depth" o espesor de penetración del material. En este trabajo se midió la variación del skin depth con la frecuencia para el cobre ($\sigma = 5{,}7\ 10^7\ (\Omega m)^{-1}$).

Si ahora se considera el campo generado dentro de un solenoide infinito de radio R por el que circula una corriente variable $I = I_0\ e^{-i\omega t}$, y en cuyo interior se encuentra un cilindro de algún material conductor, el campo está dado por:

$$B(r) = B_0 \frac{I_0(kr)}{I_0(kR)} \tag{2}$$

con $0 \leq r \leq R$ la distancia medida desde el centro del cilindro, $k = \frac{-1+i}{\delta}$ e I_0 es la función modificada de Bessel de primera especie de orden 0. Cuando la frecuencia es lo suficientemente alta como para que $\delta << R$ se recupera el caso de atenuación exponencial del plano infinito.

De (2) se deduce al integrar a lo largo del círculo de la bobina que el flujo magnético vale:

$$\Phi = 2\pi R^2 B_0 \frac{I_1(kR)}{I_0(kR)\ kR} e^{-i\omega t} \tag{3}$$

Por último, teniendo en cuenta que la inductancia L de una bobina está relacionada con el flujo dentro de ella por $\Phi = LI$ y que el flujo con núcleo de aire es $\Phi_{aire} = \pi R^2\ B_0 e^{-i\omega t}$ se tiene que:

$$\frac{\Phi_{cobre}}{\Phi_{aire}} = \frac{L_{cobre}}{L_{aire}} = 2\ \frac{I_1(kR)}{I_0(kR)\ kR} \tag{4}$$

De ahí se concluye que midiendo el cambio de una inductancia al colocar el núcleo de cobre para distintas frecuencias se puede obtener a partir de (4) la variación de δ con la frecuencia.

II. DESARROLLO EXPERIMENTAL

Basándose en la relación (4) se montó un dispositivo experimental como el mostrado en la gráfica de la figura 1. El circuito se alimentaba con una fuente S de tensión alterna de frecuencia variable porvista por un Lock-in digital 7265 DSP. A su vez, el mismo dispositivo permitía medir la tensión (en módulo y fase) en bornes del inductor L y de la resistencia limitadora $R = (1181{,}7 \pm 0{,}3)\ \Omega$. Teniendo en cuenta la configuración del circuito se tuvo la precaución de medir la tensión en bornes de la bobina en forma diferencial (no hacía falta tener este cuidado para medir la tensión en bornes de R).

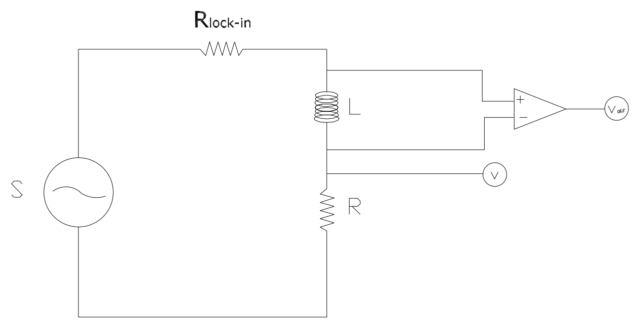

Figura 1: Esquema del circuito utilizado para medir la variación de L

De la medición de la tensión en R se obtuvo la corriente que circulaba por la bobina, luego haciendo el cociente de la tensión medida en la bobina y la corriente así obtenida se obtuvo el valor de la impedancia de la bobina para cada frecuencia.

Tanto la variación de la frecuencia como la lectura de los datos se hicieron a través de una PC que disponía de una interfase IEEE 488. El programa que permitía controlar el Lock-in se escribió en lenguaje de Visual Basic. Se realizaron mediciones con núcleo de aire y núcleo de cobre para frecuencias entre 100 Hz y 200 kHz.

Se propusieron distintos modelos circuitales para poder explicar el comportamiento de la impedancia de la bobina L en función de la frecuencia y a partir del modelo que mejor ajustaba los datos se despejó el valor de la inductancia con núcleo de aire (L_0) y con núcleo de cobre (L), siendo esta última función de ω. Luego, a partir de la relación (4), se despejó el valor de δ.

La bobina era un arrolamiento de alambre de cobre de radio interior $R_{in} = (4{,}75 \pm 0{,}01)\ mm$ y longitud $l = (42{,}0 \pm 0{,}2)\ mm$. El núcleo de cobre consistía en un cilindro de radio $R_0 = (4{,}26 \pm 0{,}01)\ mm$.

III. RESULTADOS

A. Modelo de la bobina

Al hacer el barrido en frecuencia y medir las impedancias de la bobina (en módulo y fase) con núcleo de aire y cobre se obtuvieron las siguientes curvas:

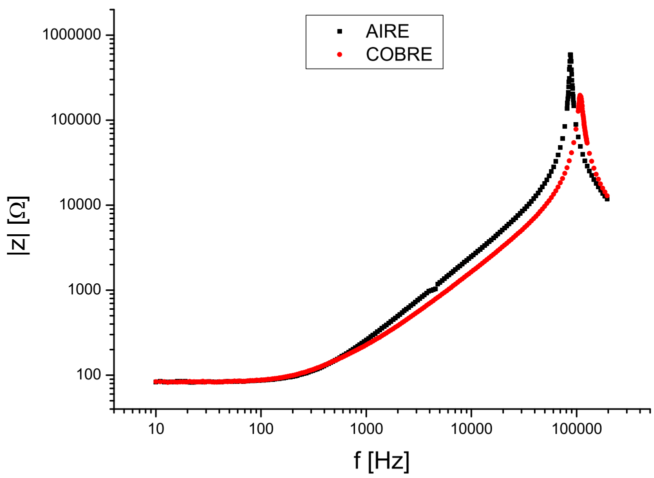

Figura 2: Variación del módulo de la impedancia de la bobina con la frecuencia con núcleo de aire y de cobre.

Para despejar el valor de la inductancia de los datos medidos hubo que hacer un modelo de la impedancia real (que, como se ve en las gráficas difiere del de una inductancia ideal). Se propusieron diferentes modelos y, a partir de la comparación con los datos experimentales (para para la impedancia con núcleo de aire) se obtuvo como mejor aproximación al mostrado en la figura 4.

En primer lugar, debe tenerse en cuenta que existe, en serie con la inductancia de la bobina una resistencia debida a que la bobina se ha construido con un alambre de conductividad finita. En segundo lugar, la presencia de una resonancia, indica la existencia de una capacidad parásita, que puede deberse a que entre las espiras se establece una diferencia de potencial, debido también a que el alambre no es un conductor perfecto.

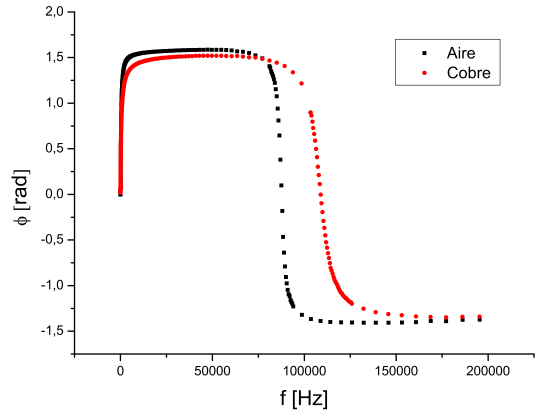

Figura 3: Variación de la fase de la impedancia de la bobina con la frecuencia con núcleo de aire y de cobre.

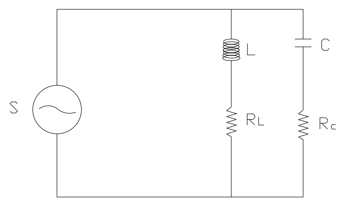

Figura 4: Modelo de impedancia propuesto.

Por último, asociada a la capacidad parásita existe cierta disipación modelable como una resistencia en serie con la misma.

Sin embargo, aún con este modelo no fue posible ajustar satisfactoriamente la zona de resonancia del circuito. La comparación puede verse en la gráfica de la figura 5

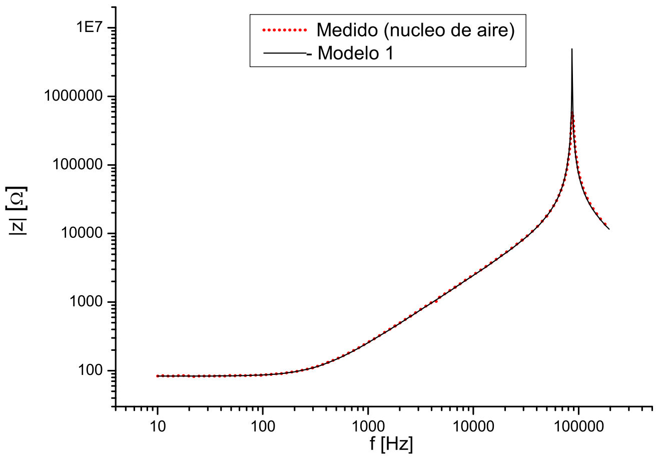

Figura 5: Comparación de la curva de impedancia para la bobina con núcleo de aire con el modelo propuesto.

Como puede apreciarse el ajuste es muy bueno, tanto a bajas como a altas frecuencias respecto de la resonancia. Sin embargo, es apreciable que el pico de resonancia teórico es mucho mayor que el medido, lo que nos indica la presencia de una fuente de disipación no considerada, que no se pudo modelar adecuadamente.

Dado que no se pudo modelar adecuadamente la impedancia para todo el rango medido fue imposible determinar los valores de C y R_c necesarios para despejar L. Por lo tanto, se decidió trabajar a frecuencias bajas, donde se puede considerar al circuito como compuesto solamente por una inductancia y una resistencia en serie (es decir, quitando la rama derecha del circuito de la figura 4). El rango considerado tuvo como cota superior los 13 kHz. Hasta esta frecuencia, el error cometido por despreciar la capacidad parásita es inferior al 5 %. Los valores de L_0 y R_L obtenidos del ajuste a bajas frecuencias fueron:

$$L = (0{,}0391 \pm 0{,}0005)\, Hn$$

$$R_{0L} = (83{,}39 \pm 0{,}05)\, \Omega$$

Las expresiones utilizadas para despejar L y R_L de los datos experimentales fueron:

$$L = \frac{|z| \sin\phi}{\omega} \tag{5}$$

$$R = |z| \cos\phi \tag{6}$$

Para el caso del cobre, el modelado es más complicado, dado que, para este circuito, tanto L como R_L varían con la frecuencia. Puede apreciarse de la gráfica de la figura 2 que el pico de resonacia se desplaza a la derecha al colocar el núcleo de cobre y que la altura de dicho pico es mucho menor que cuando el núcleo es de aire. Esto fenómenos están asociados a la disminución de la inductancia del circuito (como predice el modelo del skin depth) y a un incremento de la disipación del circuito (debido a la circulación de corrientes en el cilindro de cobre).

Para obtener los valores de L_{cobre} para las distintas frecuencias, se consideró también al circuito como R-L, suponiendo que la influencia de la capacidad parásita cuando se introduce el núcleo de cobre no modifica el rango de validez del modelo realizado. Los valores de la inductancia con núcleo de cobre para cada frecuencia se obtuvieron tambien a partir de la relación (5), que es válida para cada frecuencia.

De (6) se pudo obtener además la variación de la resistencia asociada al inductor con la frecuencia, suponiendo que la resistencia en serie con el inductor era de la forma $R_L = R_{0L} + R(f)$. Dicha variación puede observarse en la gráfica de la figura 6

B. Determinación del skin depth

Una vez determinada la inductancia con núcleo de cobre para cada frecuencia a partir de ecuación (5) y de la determinación de la inductancia con núcleo de aire se calculó el

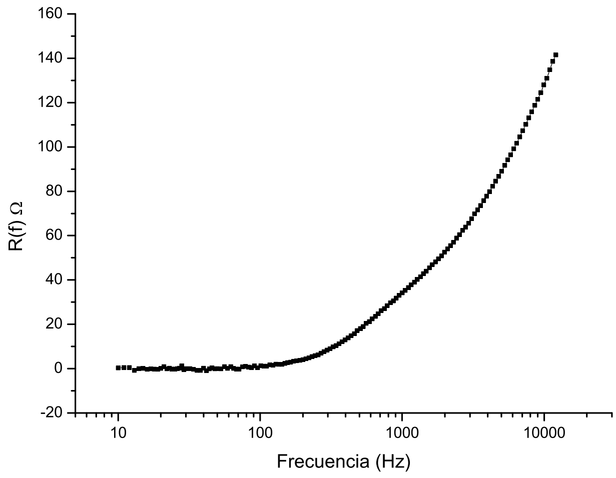

Figura 6: Variación de la resistencia con la frecuencia con núcleo de cobre.

cociente y se lo graficó en función de $\omega^{-1/2}$ (que es la dependencia con ω que tiene δ) para comparar la medición realizada con la predicha con la ecuación (4). El resultado se ve en la gráfica de la figura 7.

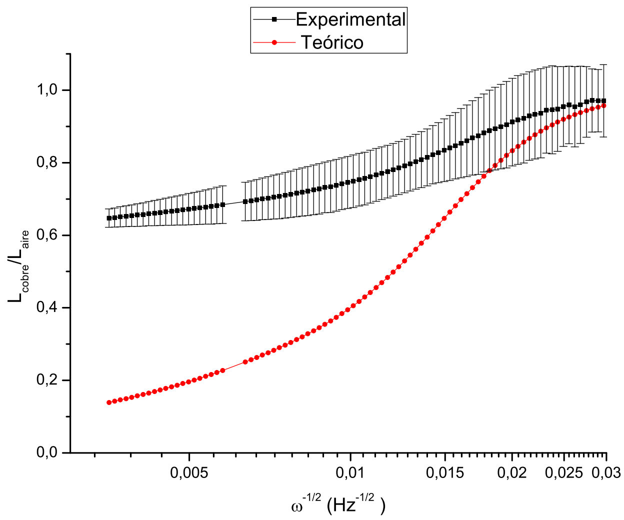

Figura 7: Relación entre inductancias.

Utilizando un programa de computadora se despejó el valor de δ a partir de los valores medidos del cociente de las inductancias y de la ecuación (4). Luego se graficó el skin depth en función de $\omega^{-1/2}$, como puede verse en la gráfica de la figura 8.

A bajas frecuencias (que corresponde al lado derecho de la gráfica) se aprecia que el comportamiento medido es muy similar al teórico salvo cierto offset. A su vez, puede observarse que mientras el espesor de penetración decrece constantemen-

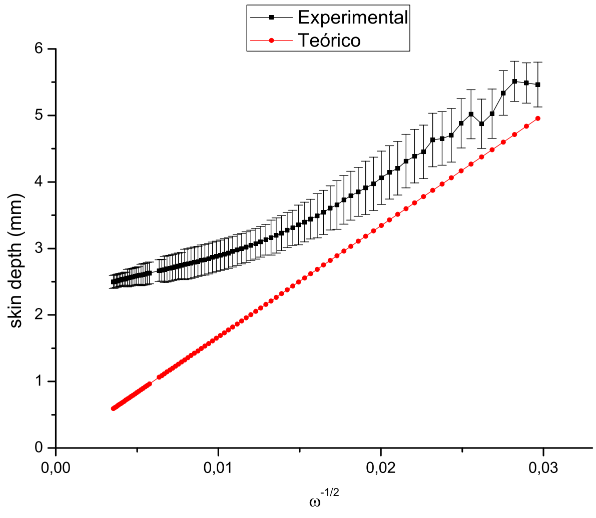

Figura 8: skin depth en función de $\omega^{-1/2}$.

te al aumentar la frecuencia (lado izquierdo dela gráfica) el medido tiende a un valor fijo.

Esto puede explicarse si se piensa que el cilindro de cobre no ocupa la totalidad del espacio interior de la bobina, es decir, aparte de la inductancia debida al espacio que ocupa el cilindro de cobre, existe una inductancia debida al espacio que no ocupa dicho cilindro. Mientras la primera tiende a cero al crecer la frecuencia, la segunda es constante ante tal cambio, dependiendo sólo de la geometría.

Teniendo en cuenta la discrepancia entre la gráfica experimental y la teórica se propuso un modelo que considera una inductancia independiente de la frecuencia. Si se considera que la cavidad que ocupada por el cilindro de cobre tiene radio a menor que el radio b efectivo del cilindro se tiene que el flujo cuando no hay cilindro de cobre es:

$$\phi = \frac{\mu_0 N I \pi \, (b^2 - a^2)}{l}$$

siendo l el largo de la bobina, N el número de espiras que posee e I la corriente que circula por ella. Diviendo por la corriente se encuentra que la inductancia L_c del "cascarón cilíndrico" vale:

$$L_c = \frac{\mu_0 N \pi \, (b^2 - a^2)}{l} = L_T - L \qquad (7)$$

siendo L_T la inductancia total del cilindro (es decir, la medida experimentalmente) y L la indunctancia de la cavidad. De forma análoga puede verse que cuando en la cavidad se coloca el cilindro de cobre se cumple que:

$$L'_T = L_c + L' \qquad (8)$$

siendo L'_T la inductancia medida en el experimento y L' es la inductancia de la cavidad con cilindro. Si llamamos $\alpha = \frac{L'_T}{L_T}$ al cociente experimental y $\tilde{\alpha} = \frac{L'}{L}$ (que es realmente el cociente correspondiente a la relación (4)), se puede demostrar que están relacionados de la siguiente forma:

$$\tilde{\alpha} = (\frac{L_c}{L} + 1)\, \alpha - \frac{L_c}{L} \qquad (9)$$

de manera que conociendo el cociente $\frac{L_c}{L}$ se podría corregir la curva experimental. Es fácil demostrar a partir de la ecuación (7) que

$$\frac{L_c}{L} = \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \qquad (10)$$

En este experimento se tuvo $a = (4{,}26 \pm 0{,}01) mm$ y $4{,}75\ mm < b < 9{,}75\ mm$ (las cotas corresponden al radio interior y exterior de la bobina respectivamente). Luego, haciendo uso de la ecuación 10 se puede ver que el cociente de la corrección está acotado por:

$$0{,}24 < \frac{L_c}{L} < 4{,}23$$

. En la gráfica de la figura 9 puede verse como varía la curva experimental para distintos valores de $\frac{L_c}{L}$.

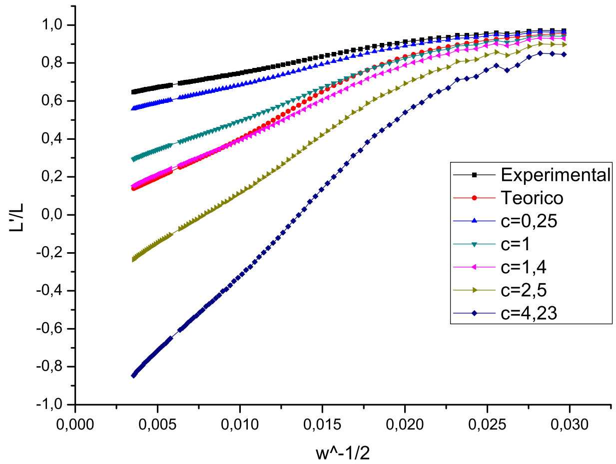

Figura 9: $\tilde{\alpha}$ para distintos valores de $c = \frac{L_c}{L}$.

Puede verse de las figuras que según este modelo el factor de corrección apropiado se encontraría entre 1 y 1.4. Si se hubiese podido medir el valor de la inductancia L_T en base a la geometría de la bobina, se hubiera podido poner a prueba esta corrección, aunque tal cosa era imposible en este experimento. Recordando lo discutido en la sección A de la parte de resultados se encuentra que en el caso de haber encontrado un modelo adecuado para el circuito para todos los valores de frecuencias de trabajo, no se hubiera podido determinar la verdadera variación del skin depth para frecuencias mayores a 13 kHz.

Se propone para experiencias futuras construir una bobina tal que el valor de b o el de L_T (medido a partir de factores geométricos) puedan ser determinados más precisamente.

IV. CONCLUSIONES

Se estudió la dependencia del skin depth del cobre con la frecuencia dentro del rango de 100 Hz a 13 kHz encontrándose discrepancias que se vuelven más significativas a medida que la frecuencia aumenta, se encontró un modelo que explica tal discrepancia en términos de factores geómetricos de la bobina y se logró hacer una estimación del coeficiente de corrección necesario para disminuir tal discrepancia. Dicho coeficiente resultó coherente con el modelo propuesto, aunque no se lo pudo determinar experimentalmente.

Tuvo que acotarse superiormente el rango de medición por debajos de las cotas máximas de los aparatos utlizados debido a la imposibilidad de modelar adecuadamente el circuito equivalente a la bobina utlizada, para frecuencias mayores a 13 kHz.

V. REFERENCIAS

[1] STRATON, J. A., *Electromagnetic Theory*, Nueva York y Londres, 1941.
[2] ABRAMOWITZ M. , *Electromagnetic Theory*, Nueva York y Londres, 1941.

Apéndice A: APÉNDICE

1. Deducción de las fórmulas matemáticas utlizadas en la introducción

En un conductor se cumple que $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, siendo $\vec{J}$ la densidad de corriente, σ la conductividad eléctrica del conductor y $\vec{E}$ el campo eléctrico debido a cierta distribución de carga. Si además no existe distribución de carga, las ecuaciones de Maxwell adoptan la siguiente forma:

$$\nabla \bullet \vec{E} = 0 \tag{A1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{A2}$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0 \tag{A3}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\sigma \vec{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{A4}$$

Siendo $\vec{B}$ el campo magnético, μ la permeabilidad magnética y ϵ la permisividad eléctrica. A partir de estas se deducen las ecuaciones de onda para el campo magnético y eléctrico. Aplicando el rotacional a A4 y utilizando A2 se obtiene:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{A5}$$

y teniendo en cuenta la identidad $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \bullet \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ se obtiene la ecuación de onda para el campo magnético:

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{A6}$$

cuya solución es de la forma $\vec{B} = \widehat{B}(\vec{r})e^{-i\omega t}$, por lo que se obtiene la siguiente ecuación para $\widehat{B}$:

$$\nabla^2 \widehat{B} + (1 + i \frac{\sigma}{\epsilon\omega})\frac{\omega^2}{c^2}\widehat{B} = 0 \tag{A7}$$

Donde $c = (\epsilon\mu)^{-1/2}$ es la velocidad de la luz en el medio. Considerando el caso de un buen conductor se cumple que $\frac{\sigma}{\epsilon\omega} >> 1$, y llamando $k = \frac{i-1}{\delta}$ con $\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}$ se tiene:

$$\nabla^2 \widehat{B} - k^2 \widehat{B} = 0 \tag{A8}$$

Hasta el momento no se realizó ningún tipo de imposición sobre la geometría del sistema, pero si ahora se considera el caso del campo magnético creado por la circulación de corriente en un solenoide infinito en su interior, es decir, $\widehat{B} = B(r)\widehat{z}$, la ecuación A8 se reduce a:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial r} - k^2 B = 0 \tag{A9}$$

Realizando el cambio de variable $u = kr$ se obtiene la ecuación de Bessel modificada de orden 0:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial u^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial B}{\partial u} - B = 0 \tag{A10}$$

cuya solución, teniendo en cuenta que el campo es acotado dentro del volumen considerado y si B_0 es el módulo del campo en la superficie del cilindro, es de la forma [2]:

$$B(r) = B_0 \frac{I_0(kr)}{I_0(kR)} \tag{A11}$$

Por lo que $\vec{B} = B(r)e^{-i\omega t}\widehat{z}$. Integrando a lo largo de de la superficie transversal del cilindro, se obtiene:

$$\Phi = 2\, \Phi_0 \frac{I_1(kR)}{I_0(kR)\, kR} \tag{A12}$$

Donde $\Phi_0 = B_0\, \pi\, R^2\, e^{-i\omega t}$ es el flujo en vacío, I_0 e I_1 son las funciones de Bessel modificadas de orden 0 y 1, respectivamente.