

Ejercicios resueltos de errores

Problema 1

Hay una magnitud física J que queremos estimar.

Depende de las mediciones de una magnitud m y de un tiempo t , de la siguiente manera:

$$J = J_0 + c m^2 \ln(t/t_0)$$

donde J_0 , c son constantes y t_0 es un tiempo característico del sistema.

Sabemos que los errores relativos son $\epsilon_t = 1\%$, $\epsilon_m = 10\%$

¿A qué tiempos conviene medir para minimizar el error absoluto de J ?

Resolución:

Claramente este es un ejercicio de propagación de errores el cual se resuelve aplicando la formula

$$\sigma_J^2 = \left[\frac{\partial J}{\partial m} \right]^2 \sigma_m^2 + \left[\frac{\partial J}{\partial t} \right]^2 \sigma_t^2 .$$

Calculemos las derivadas,

$$\frac{\partial J}{\partial m} = 2 c m \ln(t/t_0) ,$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{c m^2}{t} .$$

De esta manera

$$\begin{aligned} \sigma_J^2 &= [2 c m \ln(t/t_0)]^2 (0.10 m)^2 + \left[\frac{c m^2}{t} \right]^2 (0.01 t)^2 \\ &= 0.04 c^2 m^4 \ln^2(t/t_0) + 0.0001 c^2 m^4 \end{aligned}$$

Sólo depende de t el primer término, que como es un cuadrado, es siempre positivo.

El menor valor de σ_J^2 será cuando $t = t_0$ que es donde el logaritmo se anula.

Conviene entonces, medir los tiempos alrededor de $t = t_0$, que es el tiempo característico del experimento.

Problema 2

Un estudiante llega al final del curso y, midiendo líquidos en rotación obtuvo que

$$g_1 = (11 \pm 1) m/s^2,$$

mientras que con el péndulo resultó que

$$g_2 = (10.0 \pm 0.2) m/s^2.$$

¿Qué valor de g reporta?

Resolución:

Observando los dos valores de g no hay motivo para sospechar que haya errores sistemáticos,

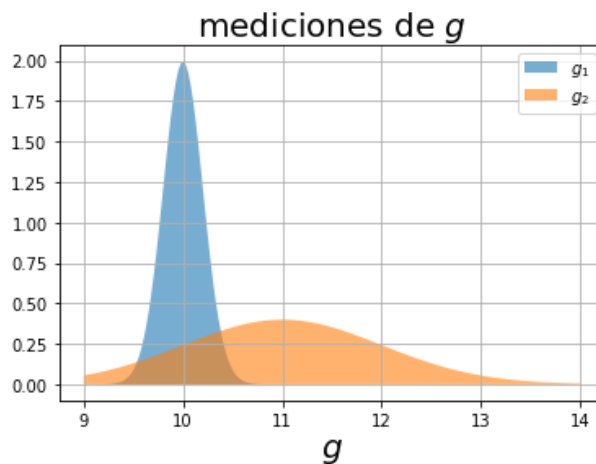
es decir que ambas mediciones son compatibles. O al menos que no tengo elementos para sospechar incompatibilidad.

Para estar más seguro, hago un gráfico (para esto no hace falta una computadora, se puede hacer a mano).

```
In [ ]: %pylab inline
        from scipy.stats import norm
```

```
In [12]: x=linspace(9,14,200)
        y1 = norm.pdf(loc=11,scale=1.0,x=x)
        y2 = norm.pdf(loc=10,scale=0.2,x=x)

        fill_between(x,0,y2,alpha=0.6,label='$g_1$')
        fill_between(x,0,y1,alpha=0.6,label='$g_2$')
        grid()
        title('mediciones de $g$', fontsize=20)
        xlabel('$g$', fontsize=20)
        legend();
```



El problema lo pienso como un ajuste de una constante g a dos mediciones:

$$\chi^2 = \frac{1}{2} \sum_i \frac{(g - g_i)^2}{\sigma_i^2}$$
$$\chi^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(g - g_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(g - g_2)^2}{\sigma_2^2} \right\}$$

el valor óptimo de g será cuando χ^2 sea mínimo

$$\left. \frac{\partial \chi^2}{\partial g} \right|_{\hat{g}} = \frac{(\hat{g} - g_1)}{\sigma_1^2} + \frac{(\hat{g} - g_2)}{\sigma_2^2} = 0$$

y esa condición me indica que

$$\hat{g} = \frac{g_1/\sigma_1^2 + g_2/\sigma_2^2}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2}.$$

Esta última expresión es muy linda, porque es un promedio pesado, en el que los pesos son $1/\sigma_i^2$.

Con nuestros valores resulta que

$$\hat{g} = 10.03846 \text{ m/s}^2$$

y esto nos dice que hay que darle mucha más importancia a g_2 porque fue medida mejor y con más esmero.

```
In [13]: g1,g2=11,10
          s1,s2=1,0.2
          w1,w2=1/s1**2,1/s2**2
          print('g =',(g1*w1+g2*w2)/(w1+w2) )
          g = 10.03846153846154
```

Nos queda saber la dispersión de \hat{g} , y para eso necesitamos la derivada segunda de χ^2 (aproximacion del Hessiano)

$$\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial g^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} = \frac{1}{\sigma_g^2}$$

de donde resulta que

$$\sigma_g = 0.196 \text{ m/s}^2$$

lo que nos muestra que la medición mala, mejora el valor resultante (aunque muy poquito).

```
In [14]: print('sg =', sqrt(1/(w1+w2)) )
          sg = 0.196116135138
```

Nos falta expresar el resultado. Siguiendo las reglas de etiqueta de truncado, el resultado debería expresarse como

$$g = (10.0 \pm 0.2) m/s^2 ,$$

lo que a la vista nos deja en el mismo lugar que la mejor de las mediciones.

*La precisión es mejor
la incerteza siempre es mala
vaya pues esta canción
para una buena estimación.*