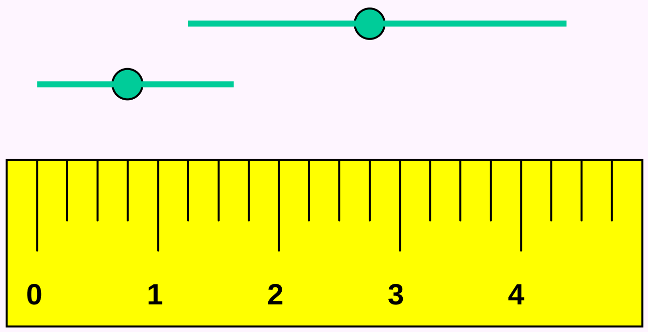
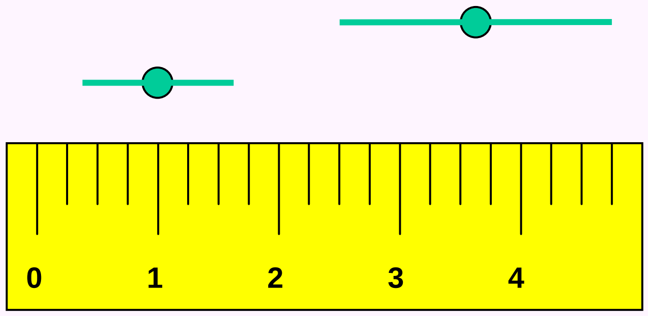
Discrepancias en las mediciones: diferencias entre 2 mediciones de la misma cantidad

No significativas: se solapan las mediciones



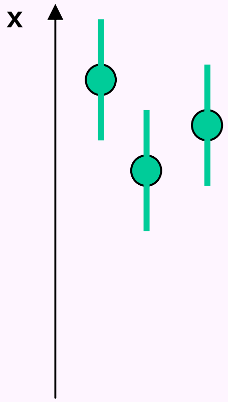
Significativas: difieren fuertemente entre sí (en al menos uno de los experimentos se ha cometido un error grave, incluyendo el análisis para determinar la banda de error)

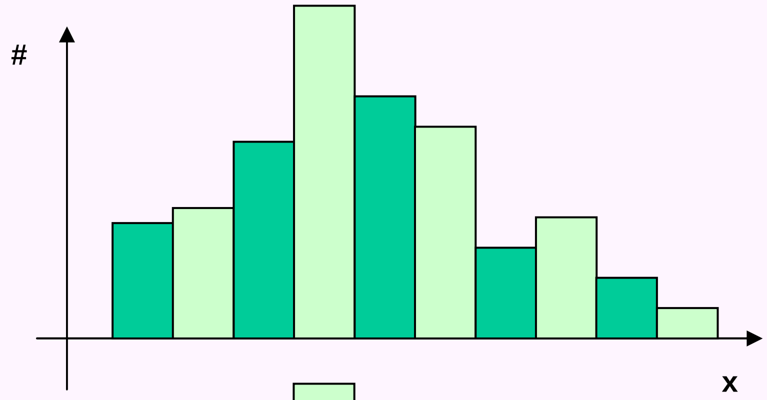


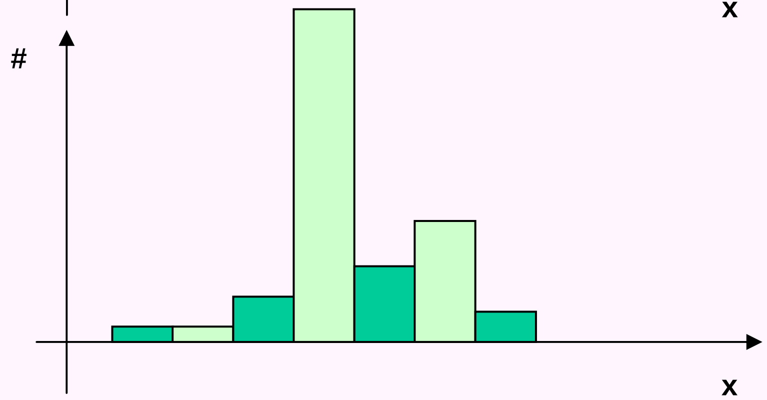
Graficando los valores medidos

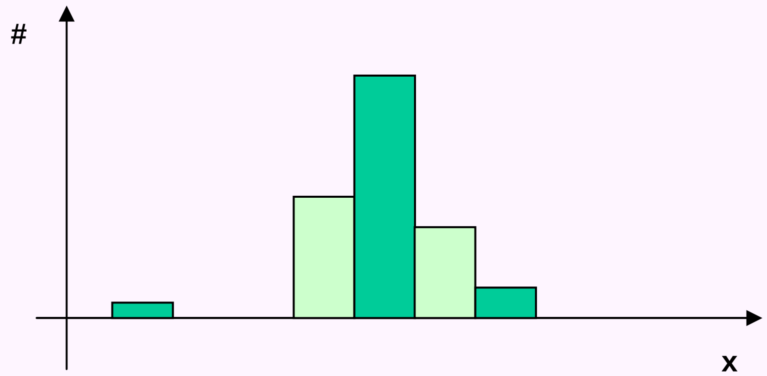
Varias mediciones de la misma variable: $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_N)$

N chico

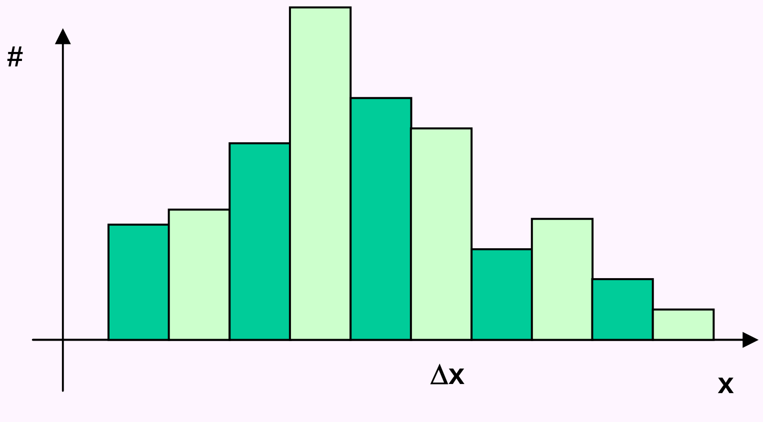








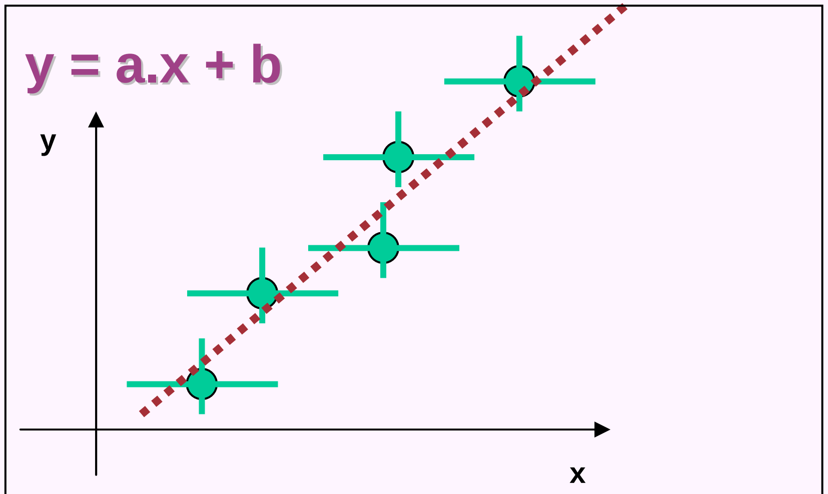
N grande: histograma



Graficando los valores medidos

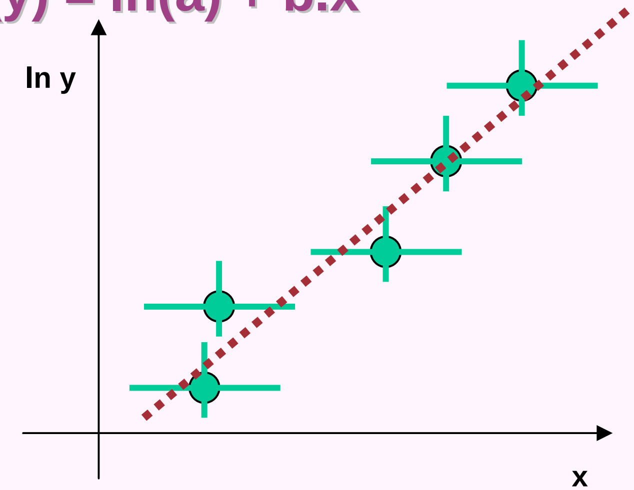
Pares de valores (x_i, y_i) relacionados por un expresión y = f(x)

y = a.x + b

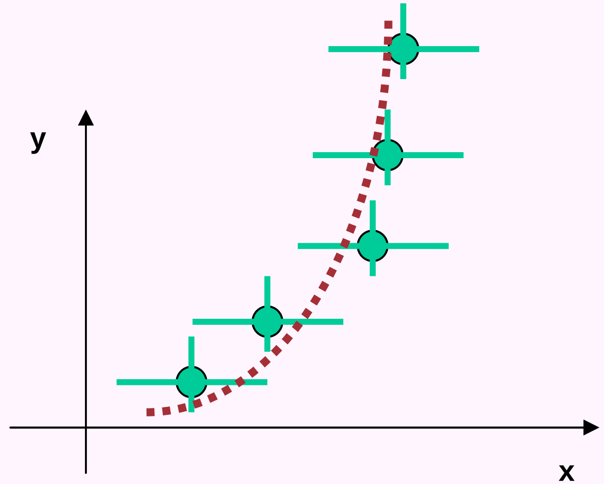


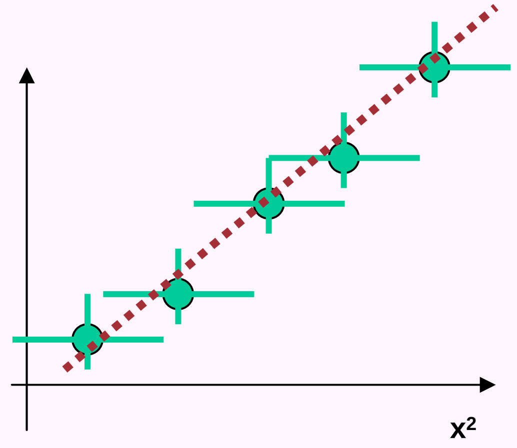
y = a.exp(b.x)

ln(y) = ln(a) + b.x



$y = a.x^2$





Guía rápida de la estimación burda de errores para algunas funciones

$Z = x + y$

$x = x_m \pm \delta x \rightarrow [x_m - \delta x, x_m + \delta x]$

$y = y_m \pm \delta y \rightarrow [y_m - \delta y, y_m + \delta y]$

$Z \rightarrow [x_m + y_m - \delta x - \delta y, x_m + y_m + \delta x + \delta y]$

$Z = (x_m + y_m) \pm (\delta x + \delta y)$

$Z = x - y$

$Z = (x_m - y_m) \pm (\delta x + \delta y)$

Guía rápida de la estimación burda de errores para algunas funciones

$Z = x \cdot y$

$x = x_m \pm \delta x \quad \rightarrow [x_m - \delta x, x_m + \delta x]$

$y = y_m \pm \delta y \quad \rightarrow [y_m - \delta y, y_m + \delta y]$

$Z = z \pm \delta z \quad \rightarrow [\ \ldots\ldots\ ,\ (x_m+\delta x).(y_m+ \delta y)]$

$z + \delta z = x_m.y_m + x_m.\delta y + y_m.\ \delta x + \underline{\delta x.\ \delta y}$

$z = x_m.y_m$

$\delta z = x_m.\delta y + y_m.\delta x$

$$\frac{\delta z}{z} = \frac{x_m.\delta y + y_m \delta x}{x_m.y_m} = \frac{\delta y}{y_m} + \frac{\delta x}{x_m}$$

$Z = x / y$

$$z = \frac{a.b.c}{d.e.f}$$

$$\frac{\delta z}{z} = \frac{\delta a}{a_m} + \frac{\delta b}{b_m} + \frac{\delta c}{c_m} + \frac{\delta d}{d_m} + \frac{\delta e}{e_m} + \frac{\delta f}{f_m}$$

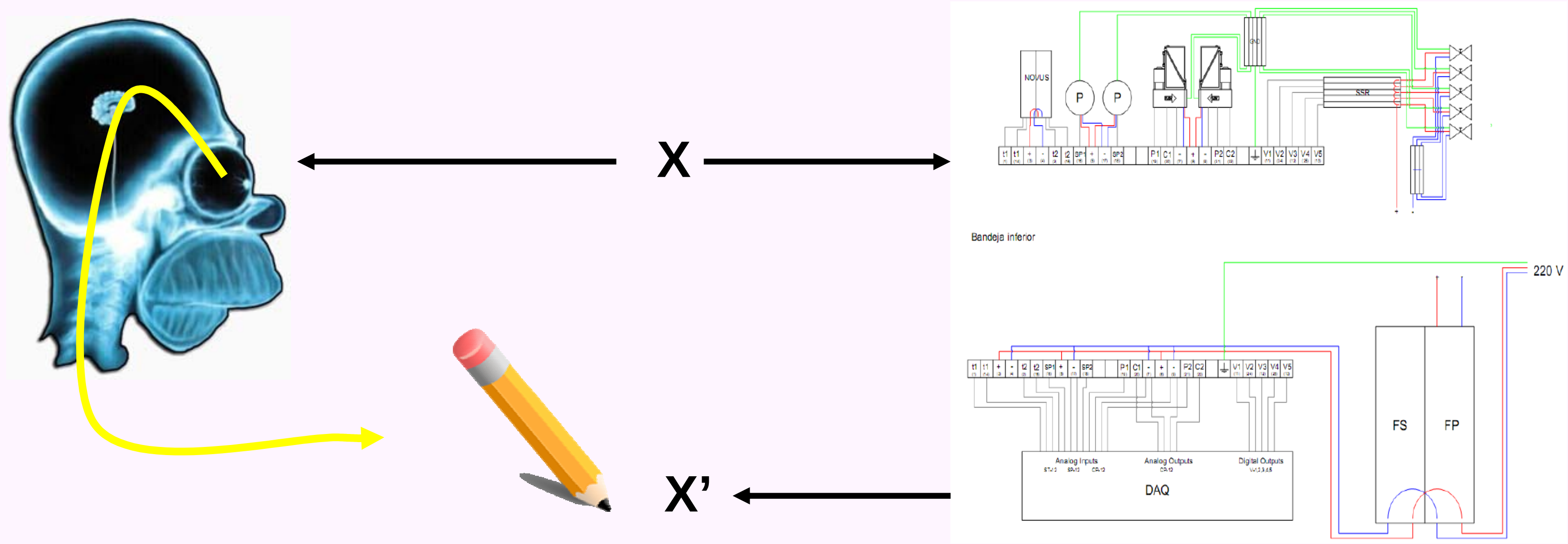
Incertezas, dudas y errores: un intento de clasificación

- **Sistemáticos**
  - de calibración de los instrumentos
  - de quien realiza la medición (humano o máquina)
  - condiciones de medición diferentes a la de calibración
  - selección equivocada del método de medición (suposiciones equivocadas o suposiciones correctas que no se cumplen)

- **Al azar**
  - al observar un valor en una escala
  - al no estar correctamente definido lo que se quiere medir (límites)
  - fluctuaciones de las condiciones de contorno (tensión, temperatura, presión, etc.)

Los errores sistemáticos: qué podemos hacer con ellos

- Encontrarlos y eliminarlos (hacerlo no es tan fácil como escribirlo): analizar muy bien la medición que hacemos
- Medirlos: dejan de ser errores y pasan a ser "`modificación por calibración"



Para $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ conocidos medimos $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ y buscamos:

F(x') que nos permita encontrar los valores de X como

$$X = F(x')$$

Los errores sistemáticos: qué podemos hacer con ellos

- Encontrarlos y eliminarlos
- Minimizarlos por calibración
- Estimar su valor

El conocimiento de la medición que hacemos o el fabricante del instrumento que estamos utilizando nos dan información sobre la confiabilidad del mismo. Por ejemplo: 1% sobre el valor medido.

Suponemos que cada medición realizada con dicho instrumento tendrá al menos la incerteza que nos avisa el fabricante.

Incertezas, dudas y errores: un intento de clasificación

- **Sistemáticos**
  - de calibración de los instrumentos
  - de quien realiza la medición (humano o máquina)
  - condiciones de medición diferentes a la de calibración
  - selección equivocada del método de medición (suposiciones equivocadas o suposiciones correctas que no se cumplen)

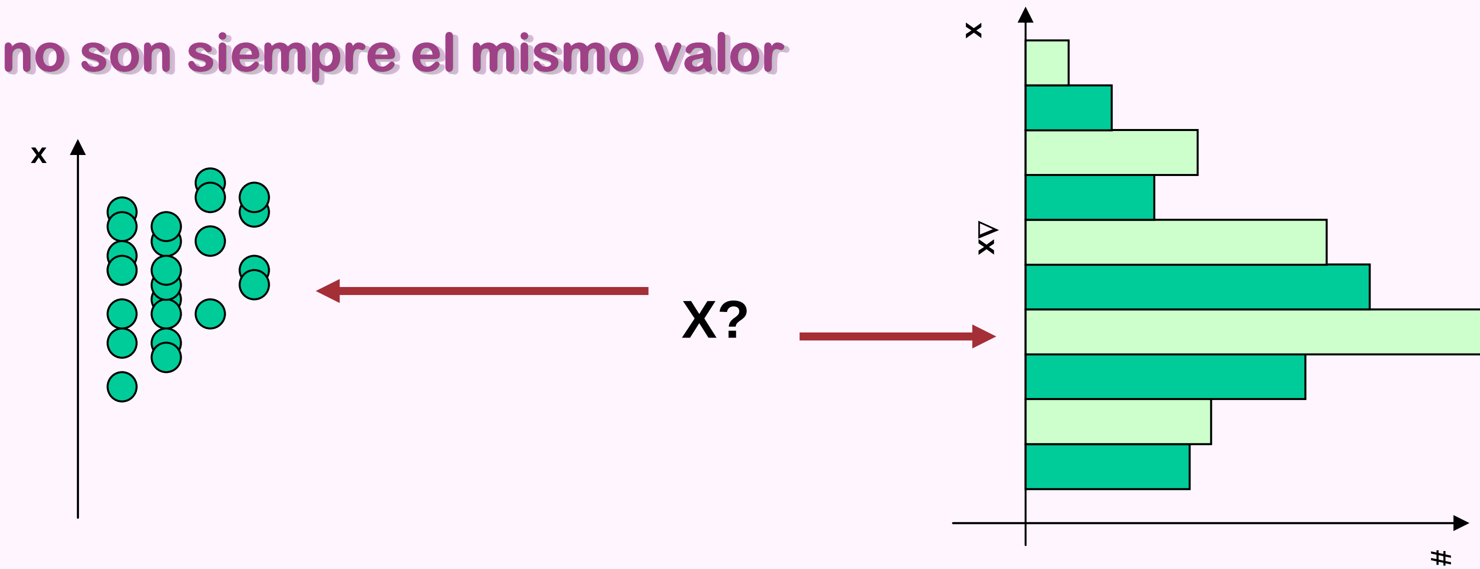
- **Al azar**
  - al observar un valor en una escala
  - al no estar correctamente definido lo que se quiere medir (límites)
  - fluctuaciones de las condiciones de contorno (tensión, temperatura, presión, etc.)

Los errores casuales: qué podemos hacer con ellos

- Se producen por efectos externos que cambian constantemente
- Suponemos que no tienen un “sentido” preferencial, sino que afectarán el proceso de medición modificando aleatoriamente su magnitud alrededor del valor “verdadero de medición”
- Entendamos como valor “verdadero de medición” aquel que mediríamos con un instrumento en caso que no existieran efectos externos aleatorios
- El análisis de los errores casuales no nos conduce necesariamente al valor “verdadero absoluto” sino al valor “verdadero de medición”.

Los errores casuales: evidencias

- realizamos n mediciones (x_1, x_2, ..., x_n) de una misma variable x,
- no son siempre el mismo valor



Criterio para definir qué valor X reportaremos como resultado

- Sea X el valor que elegimos, cada x_i diferirá de X en $\delta x_i = x_i - X$

$$mínimo \sum_{i=1}^{n} |\delta x_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - X| \qquad mínimo \sum_{i=1}^{n} (\delta x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - X)^2$$

Los errores casuales: tratamiento

$$mínimo\sum_{i=1}^{n}(\delta x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - X)^2 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial X}\sum_{i=1}^{n}(x_i - X)^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\sum_{i=1}^{n}(x_i - X)^2 = -2.\sum_{i=1}^{n}(x_i - X) = -2\sum_{i=1}^{n}x_i + 2\sum_{i=1}^{n}X = -2\sum_{i=1}^{n}x_i + 2.n.X = 0$$

$$nX = \sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

Criterio para definir cual es el X que informaré: promedio de los x_i

Los errores casuales: magnitudes relacionadas

Desvío promedio

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\delta x_i\right|$$

Varianza

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\delta x_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - X)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i{}^2 - 2x_i X + X^2) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2 - 2X\sum_{i=1}^{n}x_i + X^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2 - nX^2\right)$$

Desvío estándar

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2 - nX^2\right)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2 - nX^2\right)}$$

Los errores casuales: reportando valores

Cuando realicemos una medición x_i, esperaremos observar una fluctuación media de magnitud σ alrededor de su valor "de medición" X

Reportaremos como resultado de cada medición:

$$x_i \pm \sigma$$

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - nX^2\right)}$$

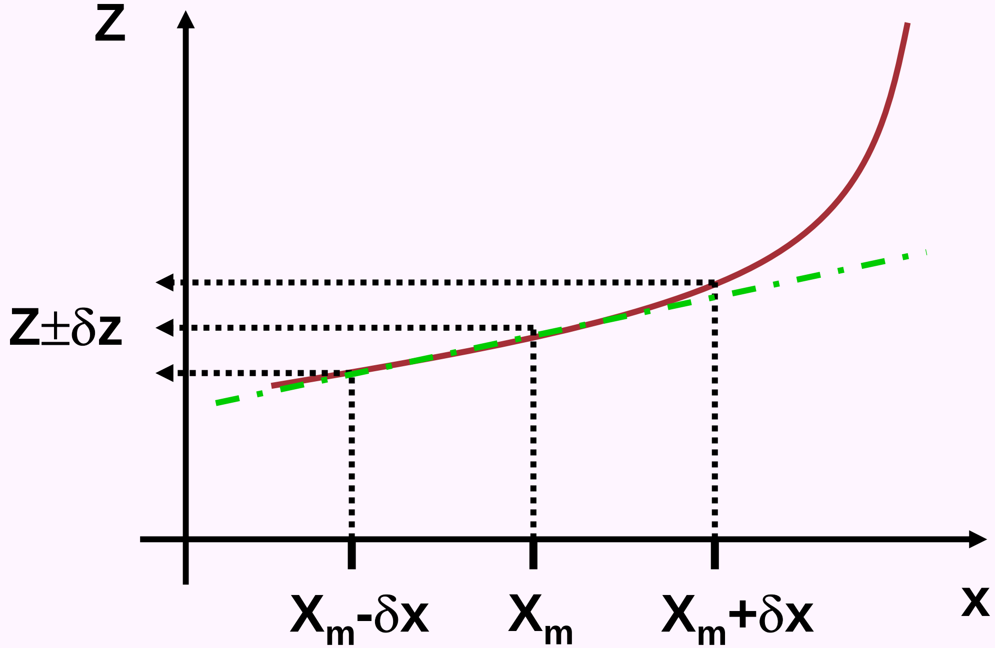
Propagando errores

Sea	**Z = Z(x)**
Pregunta:	**si $x = x_m \pm \delta x$**
	cómo expresamos Z?

- **Opción 1: calculamos Z en todo el rango (x_m-δx, x_m+δx) y determinamos δz**
- **Opción 2: aproximamos suponiendo que δx es pequeño**

$$Z = Z(x_m)$$

$$\delta z = \left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{Xm} .\delta x$$



Propagando errores

Sea	**Z = Z(w,x,y)**
Pregunta:	**si $w = w_m \pm \delta w$, $x = x_m \pm \delta x$, $y = y_m \pm \delta y$**
	cómo expresamos Z?

- **Opción 1: calculamos Z en todo el volumen alrededor de (w_m, x_m, y_m) situado a distancias $(\delta w, \delta x, \delta y)$ y obtenemos los rangos de Z**
- **Opción 2: aproximamos suponiendo que $\delta w, \delta x, \delta y$ son pequeños y que w,x,y son independientes (la ocurrencia de sus errores NO están correlacionados)**

$$Z = Z(w_m, x_m, y_m)$$

$$\delta z = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial w}\right|_{Wm} .\delta w\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{Xm} .\delta x\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{Ym} .\delta y\right)^2}$$

Propagando errores: justificación de la propuesta

Sea $Z = Z(x,y)$

Medimos: $(x_i,y_i) \rightarrow z_i = Z(x_i,y_i)$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{(x_i,y_i)} & \longrightarrow & \boxed{z_i = Z(x_i,y_i)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \boxed{(X,Y)} & \longrightarrow & \boxed{Z = Z(X,Y) = \text{promedio de } z_i} \end{array}$$

Recordemos: $\delta x_i = x_i - X,\ \delta y_i = y_i - Y$

Equivalentemente: $\delta z_i = z_i - Z$

Realizando un desarrollo de Taylor a primer orden:

$$z_i = Z(x_i, y_i) = Z(X,Y) + \left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} \delta x_i + \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \delta y_i$$

$$\delta z_i = z_i - Z(X,Y) = \left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} \delta x_i + \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \delta y_i$$

Propagando errores: justificación de la propuesta

Determinemos σ^2_z , suponemos (x,y) independientes

$$\delta z_i = \left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} \delta x_i + \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \delta y_i$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\delta z_i)^2 = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} \delta x_i + \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \delta y_i\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} \delta x_i\right)^2 + \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \delta y_i\right)^2 + \frac{2}{n}.\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y}.\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y}.\delta x_i.\delta y_i\right) =$$

$$= \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y}\right)^2.\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(\delta x_i)^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y}\right)^2.\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(\delta y_i)^2 + \left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y}.\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y}.\frac{2}{n}.\sum_{i=1}^{n}(\delta x_i.\delta y_i) =$$

$$= \sigma_z^2 = \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y}\right)^2.\sigma_x^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y}\right)^2.\sigma_y^2$$

$$\boxed{\sigma_z = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y}\right)^2.\sigma_x^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y}\right)^2.\sigma_y^2}}$$

Recordemos: estimación burda de errores para algunas funciones

$Z = x \pm y$

$Z = (x_m \pm y_m) \pm (\delta x + \delta y]$

$$Z = x_m + y_m$$

$$\delta z = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{Xm,Ym}\right)^2 .\delta_x^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{Xm,Ym}\right)^2 .\delta_y^2} =$$

$$= \delta z = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \leq \delta x + \delta y$$

$$z = \frac{a.b.c}{d.e.f}$$

$$\frac{\delta z}{z} = \frac{\delta a}{a_m} + \frac{\delta b}{b_m} + \frac{\delta c}{c_m} + \frac{\delta d}{d_m} + \frac{\delta e}{e_m} + \frac{\delta f}{f_m}$$

$$Z = \frac{a_m.b_m.c_m}{d_m.e_m.f_m}$$

$$\frac{\delta z}{Z} = \sqrt{\left(\frac{\delta_a}{a_m}\right)^2 + \left(\frac{\delta_b}{b_m}\right)^2 + \left(\frac{\delta_c}{c_m}\right)^2 + \left(\frac{\delta_d}{d_m}\right)^2 + \left(\frac{\delta_e}{e_m}\right)^2 + \left(\frac{\delta_f}{f_m}\right)^2}$$

$$\leq \left(\frac{\delta_a}{a_m}\right) + \left(\frac{\delta_b}{b_m}\right) + \left(\frac{\delta_c}{c_m}\right) + \left(\frac{\delta_d}{d_m}\right) + \left(\frac{\delta_e}{e_m}\right) + \left(\frac{\delta_f}{f_m}\right)$$

Aplicación de la propagación de errores: error del promedio

- realizamos n mediciones (x_1, x_2, ..., x_n) de una misma variable X
- reportaremos como resultado de cada medición: $\mathbf{x_i} \pm \sigma$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - nX^{\,2}\right)}$$

- reportaremos como valor de X al promedio

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- error del promedio (cada medición x_i es independiente)

$$\delta X = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial X}{\partial x_i}\right|_{Xi} \delta x_i\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}.\delta x_i\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2}.\sum_{i=1}^{n}(\delta x_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2}.n.\sigma_x^2}$$

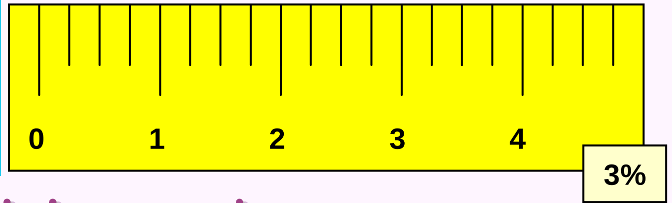
$$\delta X = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Aplicación de la propagación de errores

Combinando errores de una misma medición

$X = X_m + X_i$

Los errores de observación e instrumentos son independientes



- realizamos n mediciones (x_1, x_2, …., x_n) del paso de una persona:

  Obtenemos: $X_m = 1.54 \pm 0.06$

- utilizamos una regla cuyo fabricante informa que el error es del 3%. Para la longitud medida (1.54) la incerteza por el instrumento es

  $X_i = 0 \pm 0.05$

- Informamos:

$$X = 1.54 + 0 = 1.54$$

$$\delta X = \sqrt{\delta X_m^2 + \delta X_i^2} = \sqrt{0.06^2 + 0.05^2} \cong 0.08$$