Física Experimental / Laboratorio I

Clase #2

Análisis estadístico e incertezas aleatorias

Algunas definiciones importantes:

Valor medio, o ``media” de un conjunto de mediciones x_1, …, x_N de la *misma* cantidad física:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{N}\left(x_1 + \cdots + x_N\right)}$$

Análisis estadístico e incertezas aleatorias

Algunas definiciones importantes:

Valor medio, o ``media” de un conjunto de mediciones x_1, …, x_N de la *misma* cantidad física:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{N}(x_1 + \cdots + x_N)}$$

Desviación standard de un conjunto de mediciones x_1, …, x_N de la *misma* cantidad física:

$$\boxed{\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}}$$

donde $d_i = x_i - \overline{x}$ es la desviación de los datos respecto al promedio. El promedio de d_i no hubiera sido una buena medida de la incerteza, ya que por definición

$$\overline{d} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}(x_i - \overline{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} x_i - \frac{1}{N}N\overline{x} = \overline{x} - \overline{x} = 0$$

Histogramas: muestra de cantidades enteras

Supongamos que hacemos un experimento consistente en N determinaciones de la misma cantidad física x_1, …, x_N, la cual **solamente puede tomar valores enteros**. Entonces:

$$\overline{x} = \frac{\sum_k x_k n_k}{N}$$

n_k: cantidad de veces que se ha encontrado el valor x_k. Notar que $\sum_k n_k = N$.

Definimos la fracción de veces en que ocurre un cierto valor de x_k, como

$$F_k = \frac{n_k}{N}$$

Histogramas: muestra de cantidades enteras

Supongamos que hacemos un experimento consistente en N determinaciones de la misma cantidad física x_1, …, x_N, la cual **solamente puede tomar valores enteros**. Entonces:

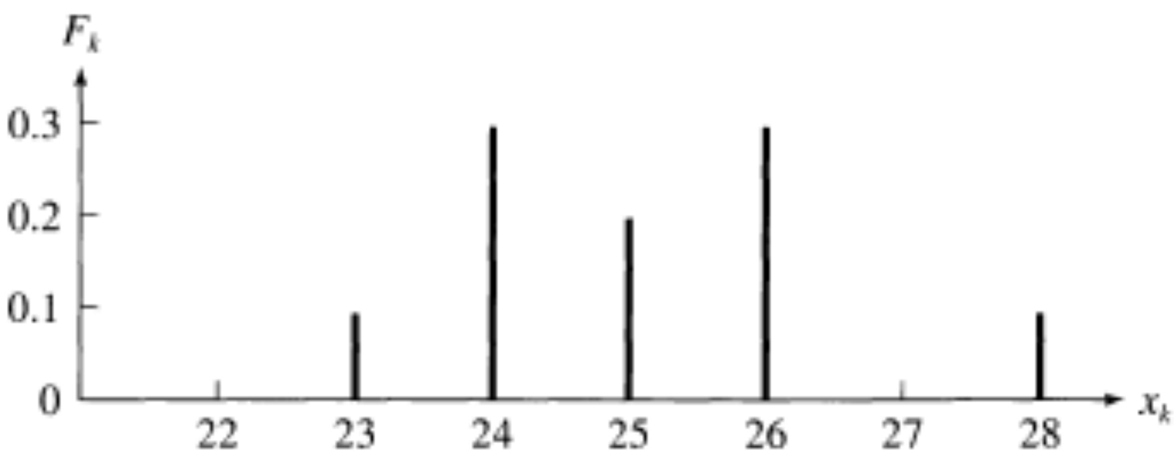
$$\overline{x} = \frac{\sum_k x_k n_k}{N}$$

n_k: cantidad de veces que se ha encontrado el valor x_k. Notar que $\sum_k n_k = N$.

Definimos la fracción de veces en que ocurre un cierto valor de x_k, como

$$F_k = \frac{n_k}{N}$$

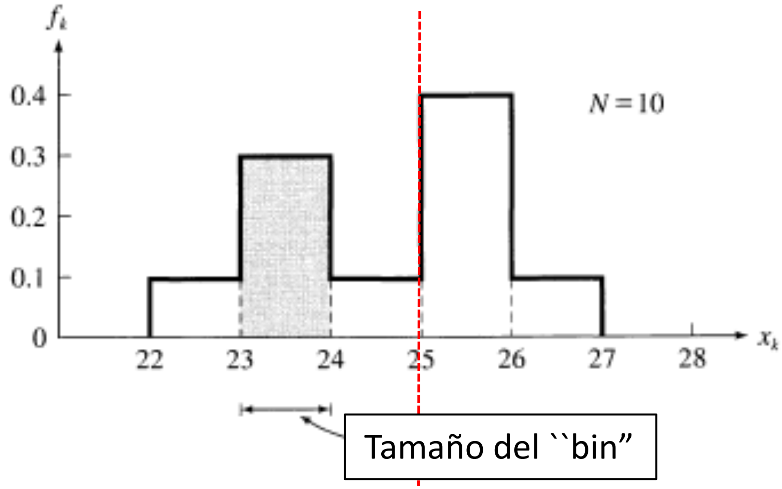
F_k describe la distribución de los resultados obtenidos:



$$\overline{x} = \sum_k x_k F_k$$

$$\sum_k F_k = 1$$

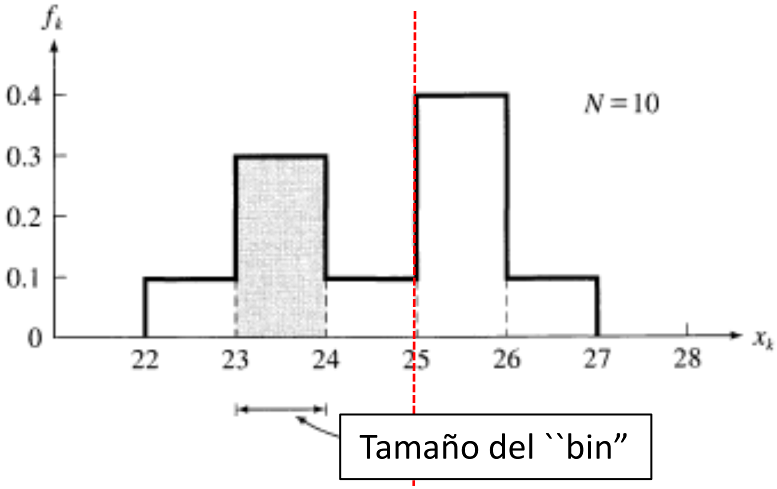
Histogramas: muestra de cantidades reales



Los x_k puede tomar valores reales

“bin”: agrupamiento en entornos limitados de valores.

Histogramas: muestra de cantidades reales



Los x_k puede tomar valores reales

“bin”: agrupamiento en entornos limitados de valores.

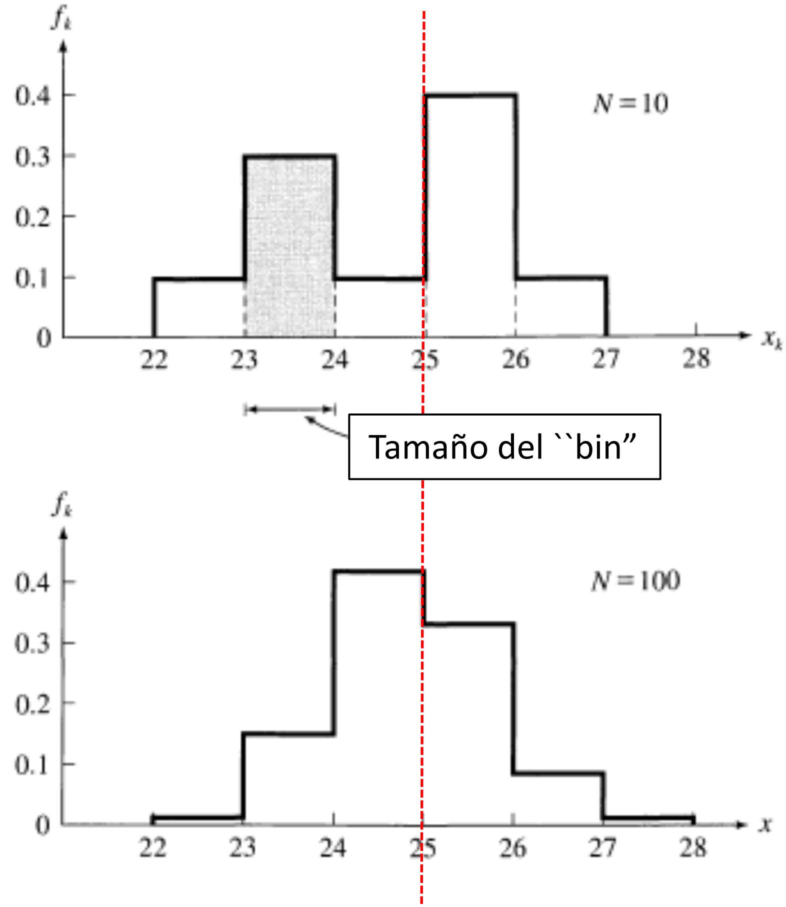
Δk : ancho del bin k-ésimo

f_k : altura del rectángulo que se dibuja en este bin

$f_k \Delta_k$: fracción de medidas observadas en el bin k.

Esta área tiene el mismo significado que la altura F_k en el gráfico de barras.

Distribución normal o de Gauss: muestra de cantidades reales



Los x_{k} puede tomar valores reales

“bin”: agrupamiento en entornos limitados de valores.

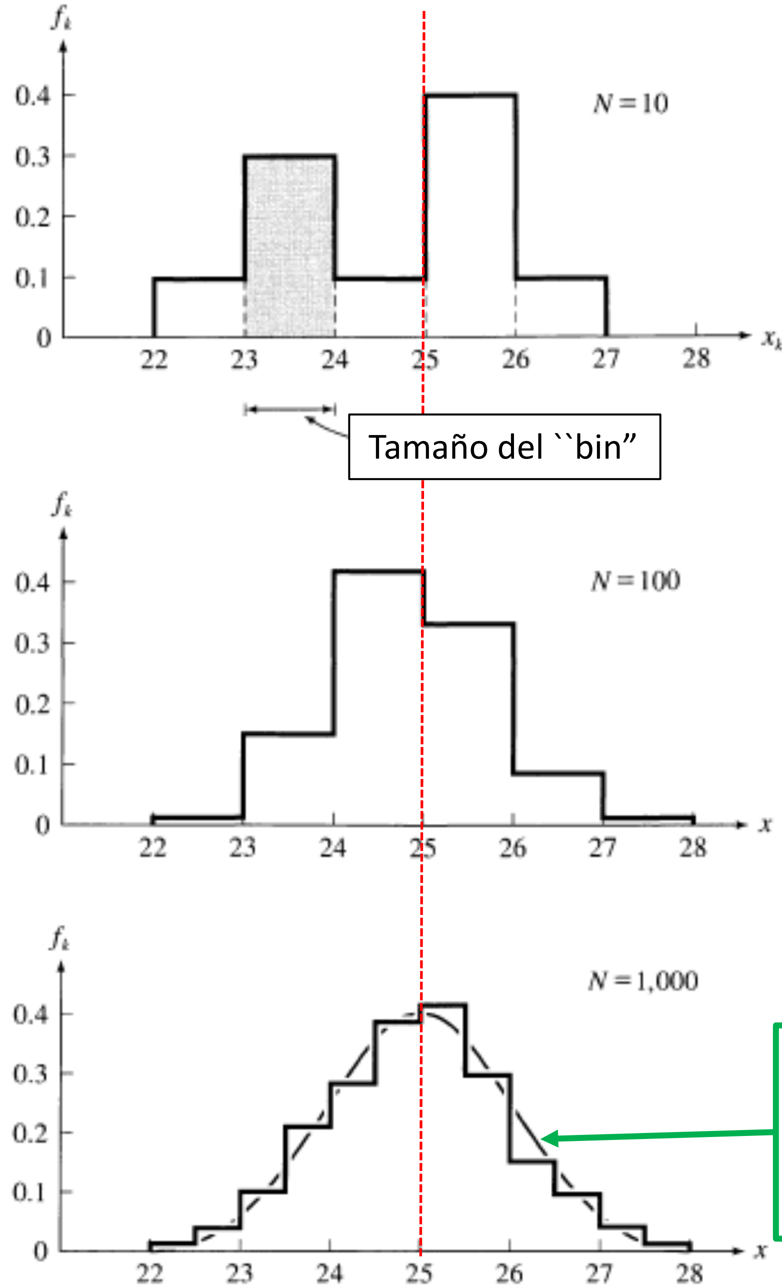
Δk : ancho del bin k-ésimo

f_k : altura del rectángulo que se dibuja en este bin

$f_k \Delta_k$: fracción de medidas observadas en el bin k.

Esta área tiene el mismo significado que la altura F_{k} en el gráfico de barras.

Distribución normal o de Gauss: muestra de cantidades reales



Los x_k puede tomar valores reales

“bin”: agrupamiento en entornos limitados de valores.

Δk : ancho del bin k-ésimo

f_k : altura del rectángulo que se dibuja en este bin

$f_k \Delta_k$: fracción de medidas observadas en el bin k.

Esta área tiene el mismo significado que la altura F_k en el gráfico de barras.

Tiende a una curva continua $f(x)$ para N-> infinito: la distribución “normal” o de Gauss (*teorema central del límite*)

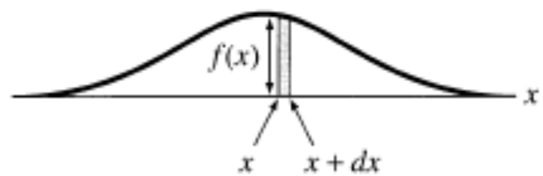
Distribuciones ``límites”

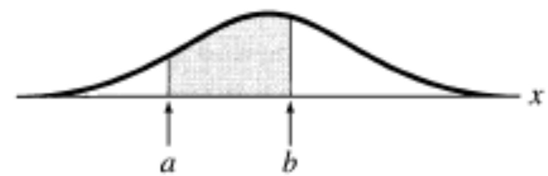
Área $f(x)dx$: fracción de mediciones que se encuentran entre x y $x + dx$.

Cumple el mismo rol de F_k : es la “probabilidad” de que una medición cualquiera resulte en un valor entre x y $x + dx$.

De manera más general, la fracción de mediciones que caen entre los valores $x = a$ y $x = b$ es

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{donde} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$





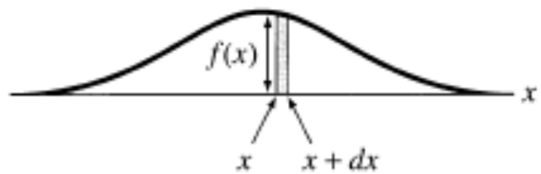
Distribuciones ``límites”

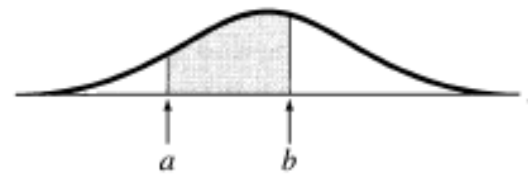
Área $f(x)dx$: fracción de mediciones que se encuentran entre x y $x + dx$.

Cumple el mismo rol de F_k : es la “probabilidad” de que una medición cualquiera resulte en un valor entre x y $x + dx$.

De manera más general, la fracción de mediciones que caen entre los valores $x = a$ y $x = b$ es

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{donde} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$





En este caso entonces resulta:

$$\boxed{\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx}$$

Valor medio

$$\boxed{\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{x})^2 f(x)dx}$$

Desviación standard (σ_x)

Distribución normal o de Gauss

$$\boxed{G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}}$$

Distribución normal o de Gauss

$$\boxed{G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}}$$

Con esta definición, el valor medio resulta ser: $\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x G_{X,\sigma}(x)\,dx$

Haciendo el cambio de variables $y = x - X$, de donde $dx = dy$, y $x = y + X$, resulta

$$\overline{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(\underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-y^2/2\sigma^2}\,dy}}_{=0} + X \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2\sigma^2}\,dy}^{=\sigma\sqrt{2\pi}}\right) \Rightarrow \boxed{\overline{x} = X}$$

Distribución normal o de Gauss

$$\boxed{G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}}$$

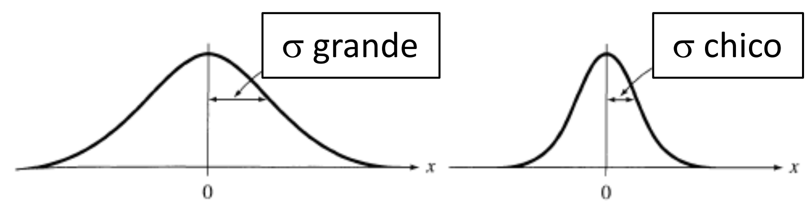
Con esta definición, el valor medio resulta ser: $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x G_{X,\sigma}(x)\,dx$

Haciendo el cambio de variables $y = x - X$, de donde $dx = dy$, y $x = y + X$, resulta

$$\bar{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(\underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-y^2/2\sigma^2}\,dy}}_{=0} + X \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2\sigma^2}\,dy}_{=\sigma\sqrt{2\pi}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{x} = X}$$

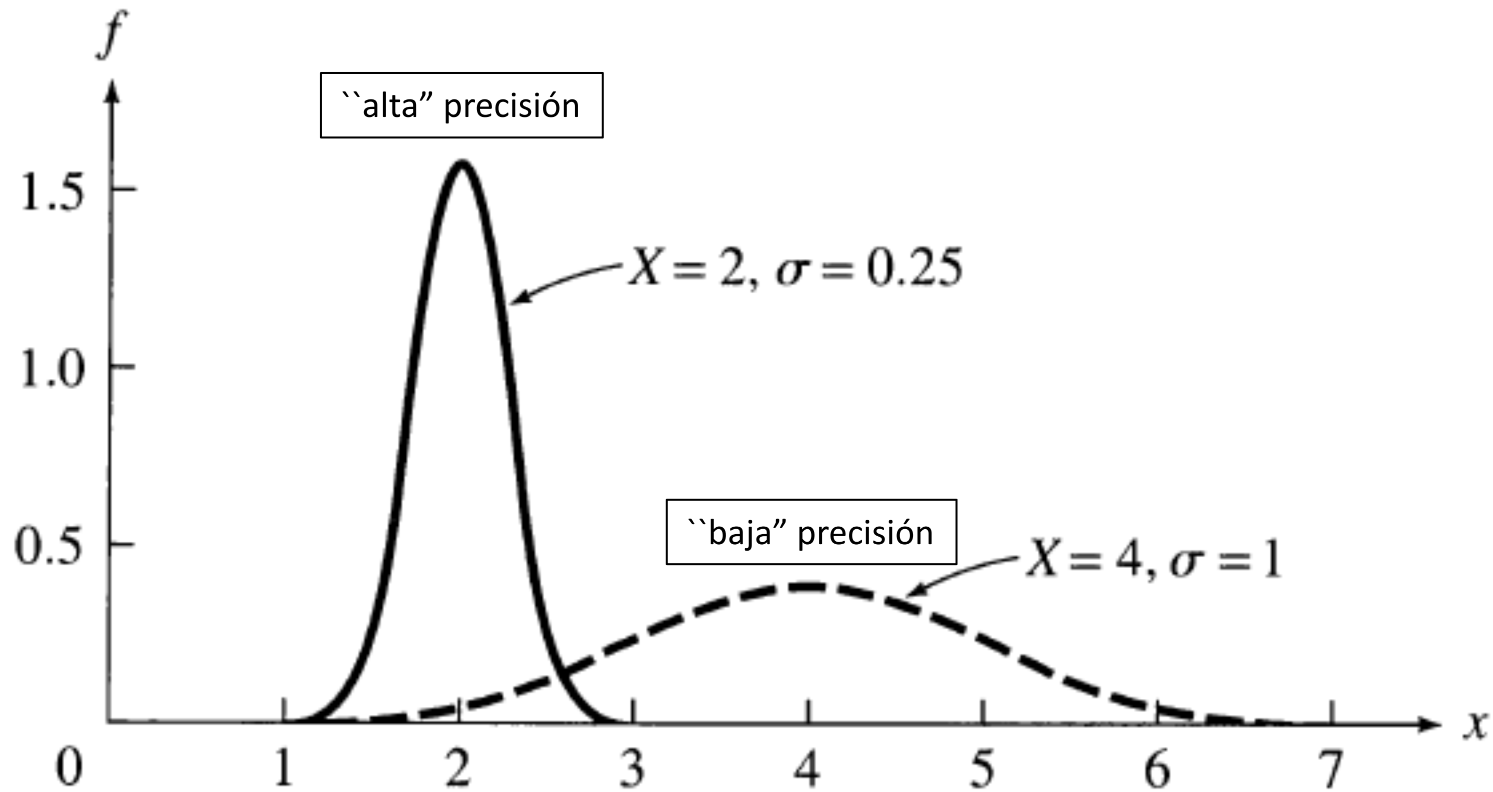
$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 G_{X,\sigma}(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_x^2 = \sigma^2}$$

$\bar{x} = X$, $y = x - X$, y $z = y/\sigma$



Distribución normal o de Gauss

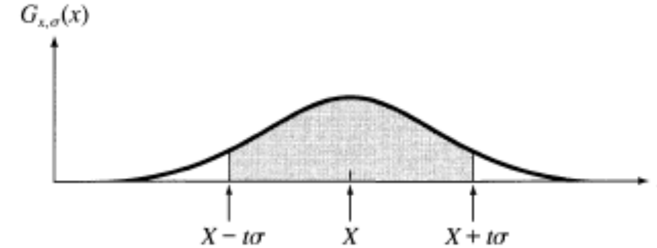
$$\boxed{G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}}$$



Distribución normal o de Gauss: σ como límite de confianza del 68%

Si nos preguntamos cuál es la probabilidad de encontrar una medición dada en el entorno $\pm t\sigma$ de X tenemos que

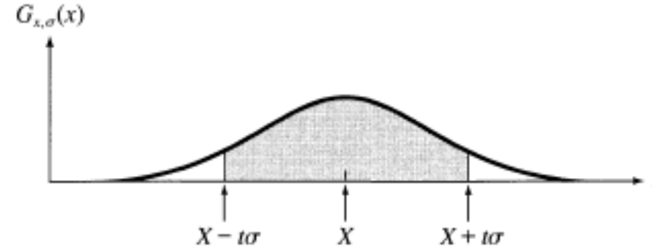
$$Prob(X \pm t\sigma) = \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} G_{X,\sigma}(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2} dx$$



Distribución normal o de Gauss: σ como límite de confianza del 68%

Si nos preguntamos cuál es la probabilidad de encontrar una medición dada en el entorno $\pm t\sigma$ de X tenemos que

$$Prob(X \pm t\sigma) = \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} G_{X,\sigma}(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2} dx$$



Sustituyendo $z = (x - X)/\sigma$, de donde $dx = \sigma dz$ y los límites de integración $z = \pm t$:

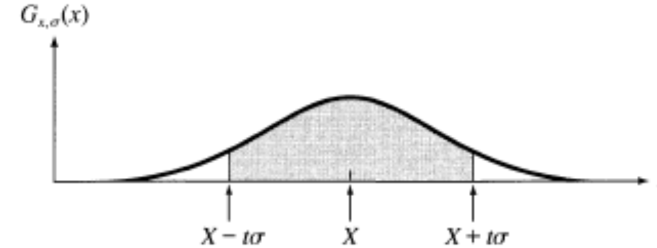
$$\boxed{Prob(X \pm t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-z^2/2} dz}$$

: *erf(t)* "error function"

Distribución normal o de Gauss: σ como límite de confianza del 68%

Si nos preguntamos cuál es la probabilidad de encontrar una medición dada en el entorno $\pm t\sigma$ de X tenemos que

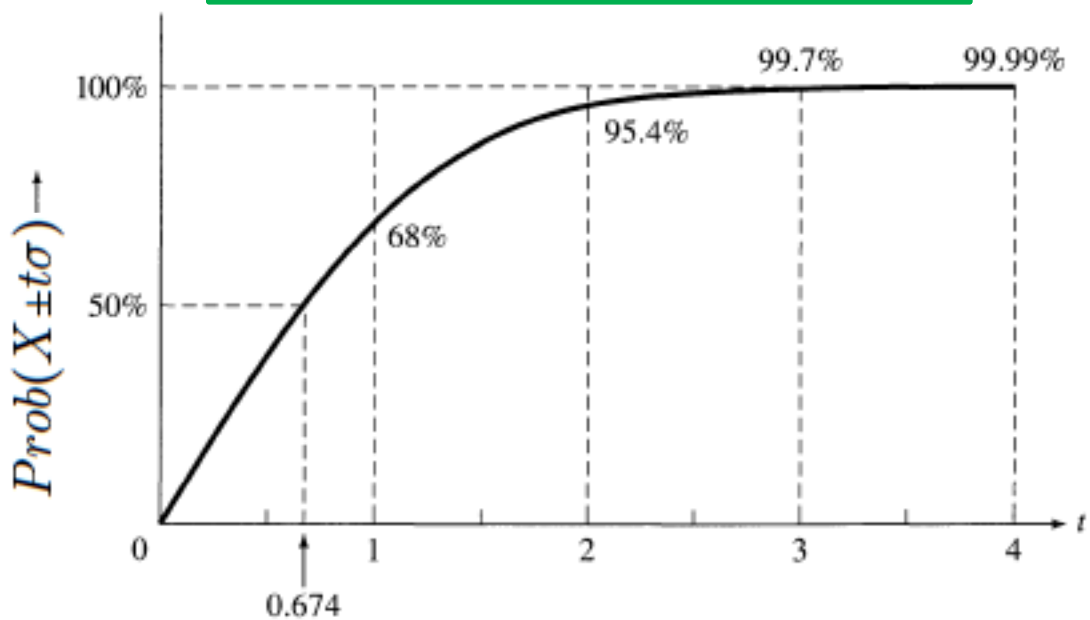
$$Prob(X \pm t\sigma) = \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} G_{X,\sigma}(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2} dx$$



Sustituyendo $z = (x - X)/\sigma$, de donde $dx = \sigma dz$ y los límites de integración $z = \pm t$:

$$\boxed{Prob(X \pm t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-z^2/2} dz}$$

: *erf(t)* "error function"



Distribución normal o de Gauss: justificación de $\overline{x}$ como mejor estimador de X

Si $f(x)$ fuera conocida, podríamos obtener el valor "verdadero" X, y su desviación standard σ.

Sin embargo, **nunca conocemos a la distribución límite**. En la práctica podemos obtener un número limitado de valores medidos x_1, x_2, …x_N: el problema es obtener al mejor estimador de X y σ basado en estos N valores medidos.

Distribución normal o de Gauss: justificación de $\overline{x}$ como mejor estimador de X

Si $f(x)$ fuera conocida, podríamos obtener el valor "verdadero" X, y su desviación standard σ.

Sin embargo, **nunca conocemos a la distribución límite**. En la práctica podemos obtener un número limitado de valores medidos x_1, x_2, …x_N: el problema es obtener al mejor estimador de X y σ basado en estos N valores medidos.

Si las mediciones siguen una distribución gaussiana $G_{X,\sigma}(x)$, entonces:

$$Prob(x \text{ entre } x_1 \text{ y } x_1 + dx_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_1-X)^2/2\sigma^2} dx_1$$

Si por otro lado las mediciones son independientes una de la otra,

$$\begin{aligned} Prob_{X,\sigma}(x_1, ..., x_N) &= Prob(x_1) \times ... \times Prob(x_N) \\ &\propto \frac{1}{\sigma^N} e^{-\Sigma(x_i-X)^2/2\sigma^2} \end{aligned}$$

Distribución normal o de Gauss: justificación de $\overline{x}$ como mejor estimador de X

Si $f(x)$ fuera conocida, podríamos obtener el valor "verdadero" X, y su desviación standard σ.

Sin embargo, **nunca conocemos a la distribución límite**. En la práctica podemos obtener un número limitado de valores medidos x_1, x_2, …x_N: el problema es obtener al mejor estimador de X y σ basado en estos N valores medidos.

Si las mediciones siguen una distribución gaussiana $G_{X,\sigma}(x)$, entonces:

$$Prob(x \text{ entre } x_1 \text{ y } x_1 + dx_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_1 - X)^2/2\sigma^2} dx_1$$

Si por otro lado las mediciones son independientes una de la otra,

$$\begin{aligned} Prob_{X,\sigma}(x_1, ..., x_N) &= Prob(x_1) \times ... \times Prob(x_N) \\ &\propto \frac{1}{\sigma^N} e^{-\Sigma(x_i - X)^2/2\sigma^2} \end{aligned}$$

Encontrar los mejores "estimadores" de X y σ equivale a preguntarse cuáles son aquellos valores que *maximizan* la probabilidad de obtener las mediciones x_1, x_2, …x_N ("principio de máxima verosimilitud").

Distribución normal o de Gauss: justificación de $\overline{x}$ como mejor estimador de X

Maximizar a $\dfrac{1}{\sigma^N} e^{-\Sigma(x_i - X)^2/2\sigma^2}$ es equivalente a *minimizar* $\sum_{i=1}^{N}(x_i - X)^2/\sigma^2$

Diferenciando respecto a X, e igualando a cero, resulta

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - X) = 0$$

De donde,

$$\boxed{(\text{mejor estimador de } X) = \frac{\sum x_i}{N}}$$

El mejor estimador de X es el promedio de las N mediciones $\overline{x} = \sum x/N$.

Distribución normal o de Gauss: justificación de σ_x como mejor estimador de σ

Encontrar el mejor estimador de σ sigue el mismo procedimiento. Es decir, hay que buscar el valor de σ que maximiza la probabilidad de obtener el conjunto de mediciones x_1, x_2, …x_N.
Esto resulta en (hacer el ejercicio):

$$(\text{mejor estimador de } \sigma) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - X)^2}$$

El mejor estimador de σ es la desviación estándar de las N mediciones.

Distribución normal o de Gauss: justificación de σ_x como mejor estimador de σ

Encontrar el mejor estimador de σ sigue el mismo procedimiento. Es decir, hay que buscar el valor de σ que maximiza la probabilidad de obtener el conjunto de mediciones x_1, x_2, …x_N.
Esto resulta en (hacer el ejercicio):

$$(\text{mejor estimador de } \sigma) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - X)^2}$$

El mejor estimador de σ es la desviación estándar de las N mediciones.

Pero ojo que **no conocemos** a X, sino a su mejor estimador $\overline{x}$. Como vimos que $\overline{x}$ es el valor que *minimiza* a la suma involucrada en este estimador de σ, es de esperar que al reemplazar a X por $\overline{x}$ estemos *subestimando* a σ. Se puede demostrar que en este caso es:

$$\boxed{(\text{mejor estimador de } \sigma) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}}$$

Distribución normal o de Gauss: justificación de σ_x como mejor estimador de σ

Encontrar el mejor estimador de σ sigue el mismo procedimiento. Es decir, hay que buscar el valor de σ que maximiza la probabilidad de obtener el conjunto de mediciones x_1, x_2, …x_N.
Esto resulta en (hacer el ejercicio):

$$(\text{mejor estimador de } \sigma) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - X)^2}$$

El mejor estimador de σ es la desviación estándar de las N mediciones.

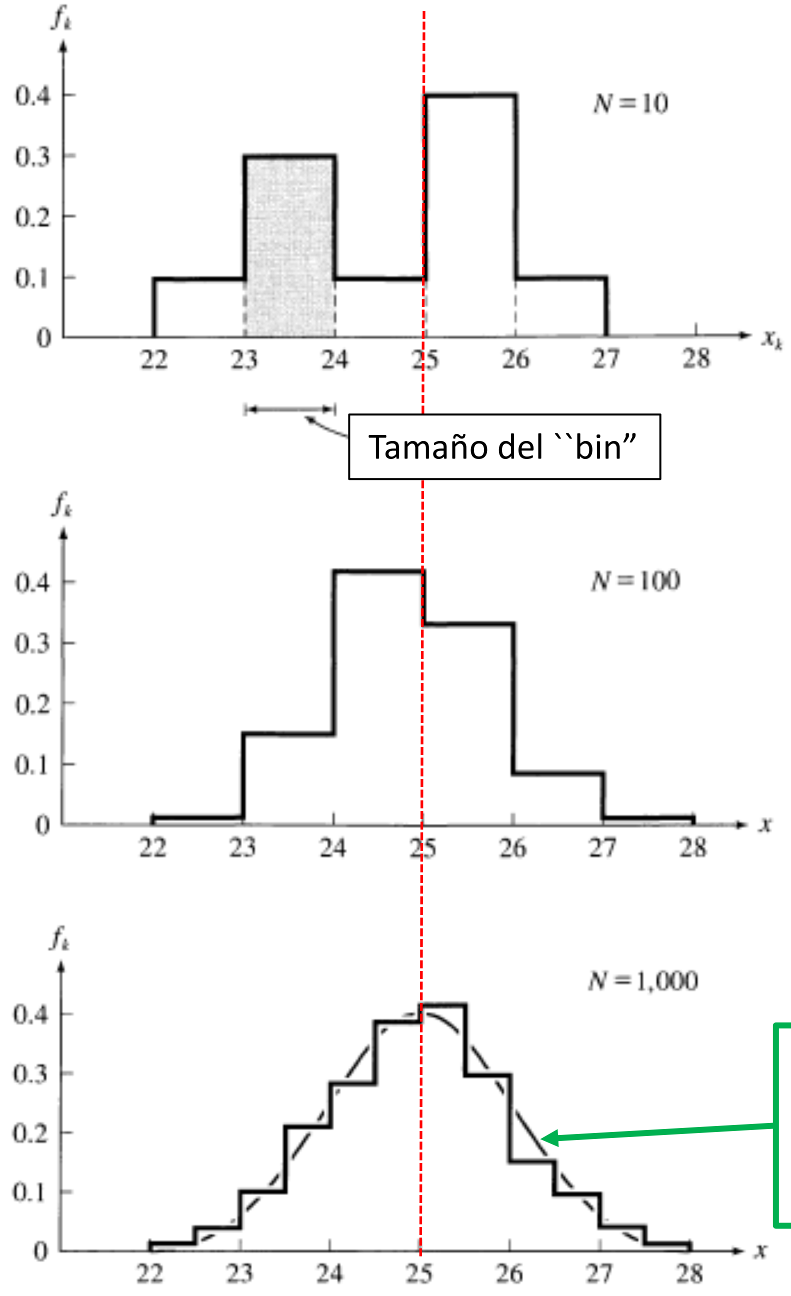
Pero ojo que **no conocemos** a X, sino a su mejor estimador $\overline{x}$. Como vimos que $\overline{x}$ es el valor que *minimiza* a la suma involucrada en este estimador de σ, es de esperar que al reemplazar a X por $\overline{x}$ estemos *subestimando* a σ. Se puede demostrar que en este caso es:

$$\boxed{(\text{mejor estimador de } \sigma) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}}$$

Finalmente, también se puede demostrar que

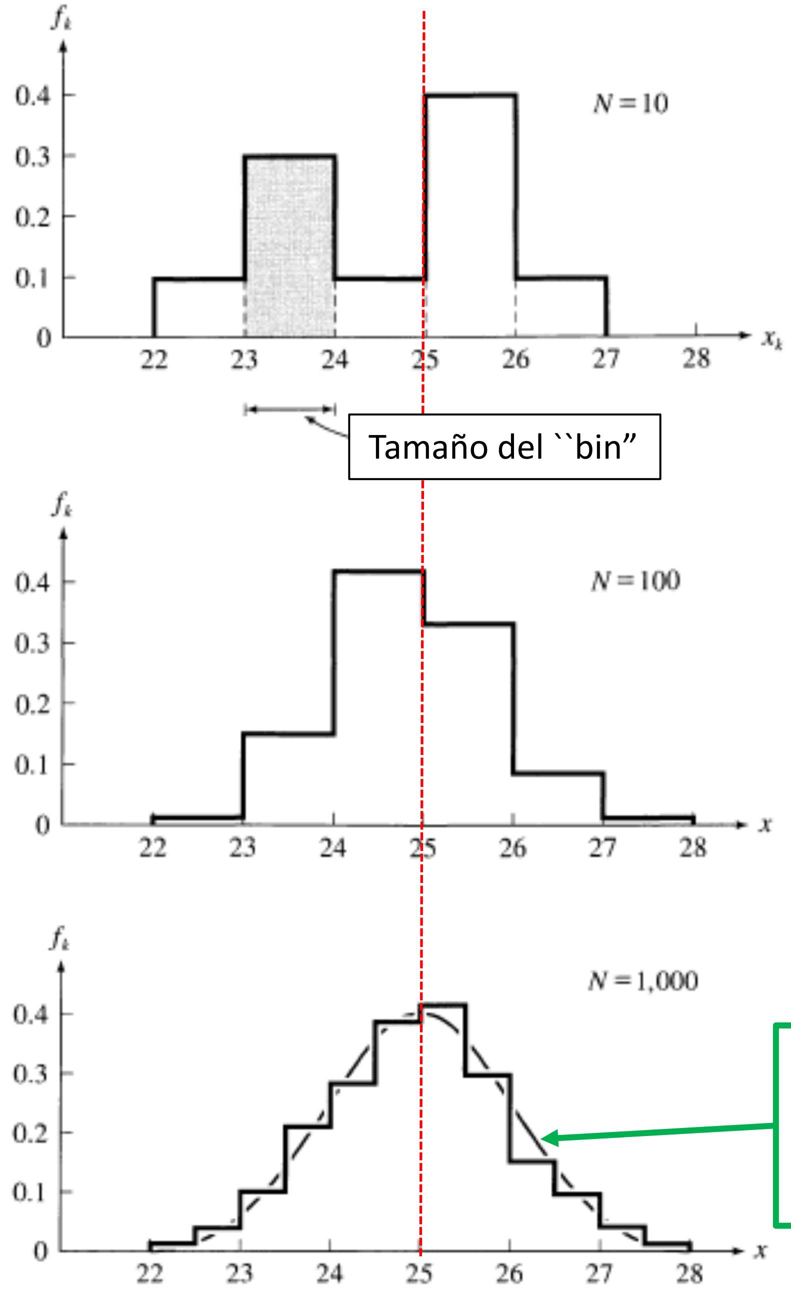
$$\boxed{\frac{\delta\sigma_x}{\sigma_x} = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}}}$$

Cómo usamos entonces a esta información?



Tiende a una curva continua para N-> infinito:
la distribución “normal” o de Gauss (*teorema central del límite*)

Cómo usamos entonces a esta información?



La distribución caracteriza al método

σ_x : es la incerteza para una medición individual

Tiende a una curva continua para N-> infinito:
la distribución “normal” o de Gauss (*teorema central del límite*)

Propagación de errores: justificación de la suma en cuadratura

Si consideramos una función general $q(x,y)$ donde x e y se han determinado con incertezas σ_x y σ_y.
La pregunta es cómo determinar la incerteza de q.

Cantidad **más** una constante: $q = x + A$

$$(\text{Probabilidad de obtener } x) \propto e^{-(x-X)^2/2\sigma_x^2}$$

Como $x = q - A$

$$\begin{aligned}(\text{Probabilidad de obtener } q) &\propto e^{-[(q-A)-X]^2/2\sigma_x^2} \\ &= e^{-[q-(A+X)]^2/2\sigma_x^2}\end{aligned}$$

Es decir, los valores de q seguirán una distribución normal, centrada en el valor desplazado $X + A$, y con una incerteza igual a la de x (σ_x).

Propagación de errores: justificación de la suma en cuadratura

Si consideramos una función general $q(x,y)$ donde x e y se han determinado con incertezas σ_x y σ_y.
La pregunta es cómo determinar la incerteza de q.

<u>Cantidad **más** una constante</u>: $q = x + A$

$$(\text{Probabilidad de obtener } x) \propto e^{-(x-X)^2/2\sigma_x^2}$$

Como $x = q - A$

$$\begin{aligned}(\text{Probabilidad de obtener } q) &\propto e^{-[(q-A)-X]^2/2\sigma_x^2} \\ &= e^{-[q-(A+X)]^2/2\sigma_x^2}\end{aligned}$$

Es decir, los valores de q seguirán una distribución normal, centrada en el valor desplazado $X + A$, y con una incerteza igual a la de x (σ_x).

<u>Cantidad **por** una constante</u>: $q = Bx$, es decir $x=q/B$

$$\begin{aligned}(\text{Probabilidad de obtener } q) &\propto e^{-[(\frac{q}{B}-X]^2/2\sigma_x^2} \\ &= e^{-[q-(BX)]^2/2B^2\sigma_x^2}\end{aligned}$$

Los valores de q seguirán una distribución normal, centrada en BX, y con una incerteza $B\sigma_x$.

Propagación de errores: justificación de la suma en cuadratura

Suma de dos cantidades: $q = x + y$

Para dos valores arbitrarios de x e y: $$Prob(x,y) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right]$$

Propagación de errores: justificación de la suma en cuadratura

<u>Suma de dos cantidades</u>: $q = x + y$

Para dos valores arbitrarios de x e y: $$Prob(x,y) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right]$$

Teniendo en cuenta que $$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = \frac{(x+y)^2}{A+B} + \frac{(Bx-Ay)^2}{AB(A+B)} = \frac{(x+y)^2}{A+B} + z^2$$

Propagación de errores: justificación de la suma en cuadratura

<u>Suma de dos cantidades</u>: $q = x + y$

Para dos valores arbitrarios de x e y: $Prob(x, y) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right]$

Teniendo en cuenta que $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = \frac{(x+y)^2}{A+B} + \frac{(Bx - Ay)^2}{AB(A+B)} = \frac{(x+y)^2}{A+B} + z^2$

Entonces $Prob(x+y, z) \propto \exp\left[-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right]\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]$

Integrando para todo z, $Prob(x+y) \propto \exp\left[-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right]$

Los valores de $x + y$ siguen una distribución normal, con ancho $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$.

Propagación de errores: justificación de la suma en cuadratura

Por una constante, multiplica σ

Caso más general: $q(x,y) \approx q(X,Y) + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)(x - X) + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)(y - Y)$

Más una constante, no modifica σ

Entonces:

$$\boxed{\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\sigma_y\right)^2}}$$

Regla general para funciones de varias variables

Entonces en general, si los errores son aleatorios y las variables son independientes:

$$\boxed{\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\delta x\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\delta z\right)^2}}$$

Y, en cualquier caso, es siempre menor a la suma ordinaria

$$\delta q \leq \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \ldots + \left|\frac{\partial q}{\partial z}\right|\delta z$$

Propagación de errores: casos usuales derivados de la fórmula general

Sumas y restas

Supongamos que $x, \ldots, w$ son cantidades medidas con incertezas $\delta x, \ldots \delta w$, y estos valores medidos se utilizan para computar la cantidad

$$q = x + \ldots + z - (u + \ldots + w)$$

Entonces, si las incertezas en $x, \ldots, w$ se sabe que son independientes y aleatorias,

$$\boxed{\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + \ldots + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + \ldots + (\delta w)^2}}$$

Y, en cualquier caso, δq nunca es mayor a la suma directa de todas las incertezas,

$$\delta q \leq \delta x + \ldots + \delta z + \delta u + \ldots + \delta w$$

Propagación de errores: casos usuales derivados de la fórmula general

Productos y cocientes

Supongamos ahora que $x, \ldots, w$ son cantidades medidas con incertezas $\delta x, \ldots \delta w$, y estos valores medidos se utilizan para computar la cantidad

$$q = \frac{x \times \ldots \times z}{u \times \ldots \times w}$$

Entonces, si las incertezas en $x, \ldots, w$ se sabe que son independientes y aleatorias,

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{|x|}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\delta z}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{|u|}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\delta w}{|w|}\right)^2}}$$

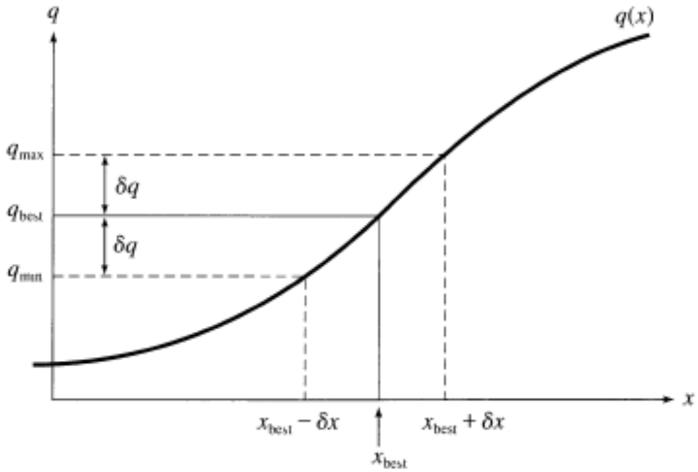
Y, en cualquier caso, δq nunca es mayor a la suma directa de todas las incertezas “relativas”,

$$\frac{\delta q}{|q|} \leq \frac{\delta x}{|x|} + \ldots + \frac{\delta z}{|z|} + \frac{\delta u}{|u|} + \ldots + \frac{\delta w}{|w|}$$

Propagación de errores: casos usuales derivados de la fórmula general

Función arbitraria de una variable

En el caso más general, si q es una función arbitraria de una variable, $q(x)$, entonces



$$\boxed{\delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right| \delta x}$$

Propagación de errores: casos usuales derivados de la fórmula general

Potencias

Si $q(x) = x^n$, entonces $\delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right| \delta x = \left|n x^{n-1}\right| \delta x$, donde dividiendo por $|q(x)| = |x^n|$

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = |n| \frac{\delta x}{|x|}}$$

Producto por una constante

Si $q = Bx$, entonces

$$\boxed{\delta q = |B| \delta x}$$

Propagación de errores: incerteza del valor medio

La desviación standard se puede entender como la incerteza asociada *a una medición única*.

Cuando se mide muchas veces, y es posible de esa manera determinar a $\overline{x}$ y a σ_x, entonces se reporta a $\overline{x}$ como el mejor estimador para la cantidad buscada (suponiendo que no hay incertezas sistemáticas).

El valor medio es la suma de las variables independientes x_i, todas con la misma desviación standard σ_x. Utilizando la regla general para propagación de errores:

$$\sigma_{\overline{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i}\sigma_x\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\sigma_x\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_x^2}$$

Propagación de errores: incerteza del valor medio

La desviación standard se puede entender como la incerteza asociada *a una medición única*.

Cuando se mide muchas veces, y es posible de esa manera determinar a $\overline{x}$ y a σ_x, entonces se reporta a $\overline{x}$ como el mejor estimador para la cantidad buscada (suponiendo que no hay incertezas sistemáticas).

El valor medio es la suma de las variables independientes x_i, todas con la misma desviación standard σ_x. Utilizando la regla general para propagación de errores:

$$\sigma_{\overline{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i}\sigma_x\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\sigma_x\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_x^2}$$

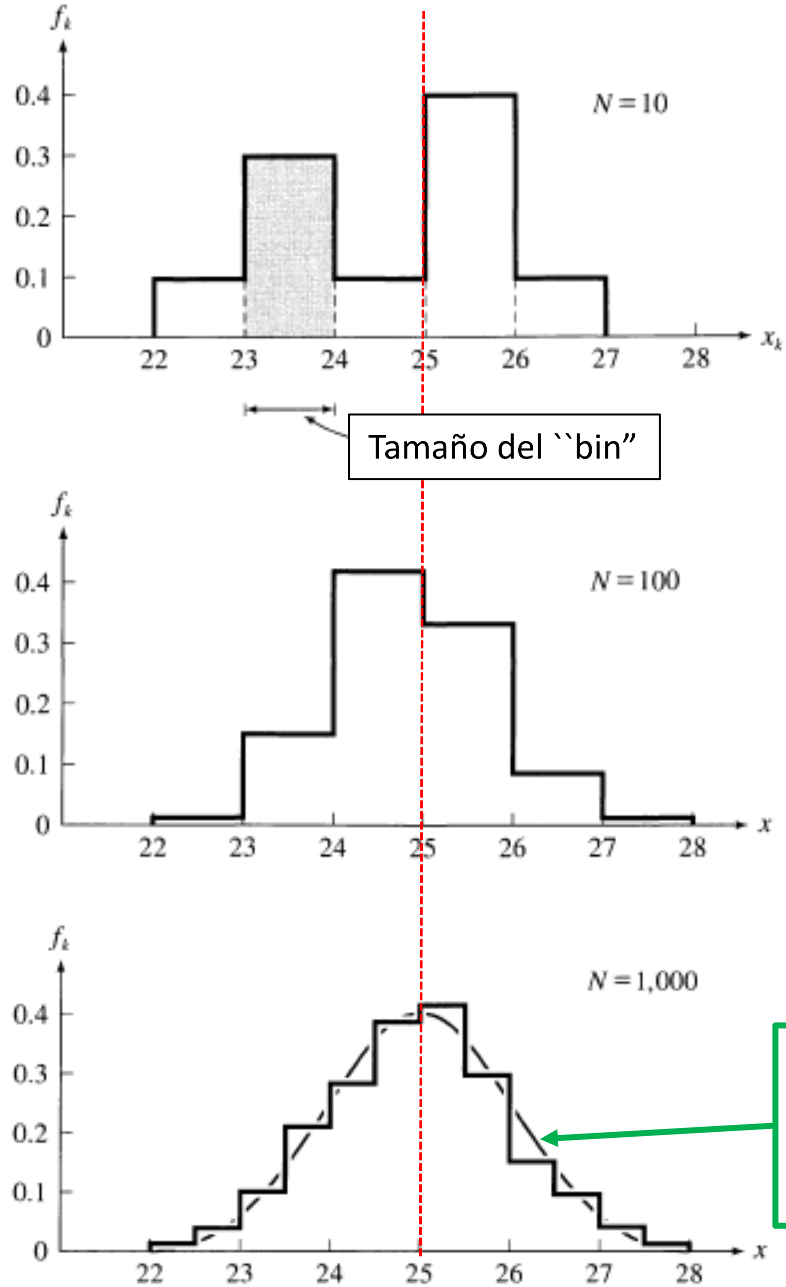
De donde

$$\boxed{\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}}$$

Reportaremos el resultado de un experimento consistente en N determinaciones de la misma cantidad física $x_1, \ldots, x_N$ de la siguiente manera,

$$\boxed{x = \overline{x} \pm \sigma_{\overline{x}}}$$

Para recordar el efecto de hacer una muestra más grande:



σ_x : es aproximadamente independiente de N

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$: decrece con N al definirse mejor la distribución

Tiende a una curva continua para N-> infinito:
la distribución “normal” o de Gauss (*teorema central del límite*)

El porqué la varianza va dividida por (N-1)

Vimos que el mejor estimador de la desviación standard era $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - X)^2}$

donde X es el valor "real" que es desconocido. Podemos reescribir esto como

$$N\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i + \overline{x} - \overline{x} - X)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{N}(\overline{x} - X)^2 + 2(\overline{x} - X)\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})$$

El segundo término es N veces la varianza del valor medio $N\sigma^2_x/N$. Y el último término es cero. Tenemos entonces que

$$N\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 + \sigma_x^2$$

de donde

$$\boxed{\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}}$$

Una receta a veces útil: propagación de errores “paso a paso”

Supongamos por ejemplo tener que calcular la cantidad

$$q = x\,(y - z \sin u)$$

a partir de las cantidades medidas x, y, z y u, y obtener la incerteza δq a partir de las correspondientes incertezas δx, δy, δz y δu. Esto se puede hacer con los siguientes pasos:

i) Calcular la *función* sin u y su incerteza,
ii) Luego evaluar el *producto* de z con sin u, y obtener su incerteza
iii) Seguidamente la *diferencia* entre y y z sin u, con su incerteza, y
iv) Finalmente terminar con el *producto* de x por (y – z sin u)

Una receta a veces útil: propagación de errores “paso a paso”

Supongamos por ejemplo tener que calcular la cantidad

$$q = x\,(y - z\sin u)$$

a partir de las cantidades medidas x, y, z y u, y obtener la incerteza δq a partir de las correspondientes incertezas δx, δy, δz y δu. Esto se puede hacer con los siguientes pasos:

i) Calcular la *función* sin u y su incerteza,
ii) Luego evaluar el *producto* de z con sin u, y obtener su incerteza
iii) Seguidamente la *diferencia* entre y y z sin u, con su incerteza, y
iv) Finalmente terminar con el *producto* de x por (y – z sin u)

Pero ojo que esto no se puede hacer si los distintos “pasos” no corresponden a incertezas independientes, por ejemplo en funciones como:

$$q = y - x\sin y \qquad \text{ó} \qquad q = \frac{y - x\sin z}{y + x\sin z}$$

En este caso usar la fórmula general

Cómo incluir los errores sistemáticos en la incerteza total

Finalmente, y aunque no tiene una demostración formal, si existieran incertezas sistemáticas cuya magnitud pueda determinarse, se puede utilizar argumentos de razonabilidad para concluir que

$$\delta x_{tot} = \sqrt{(\delta x_{ale})^2 + (\delta x_{sis})^2}$$

Y ante la duda,

$$\delta x_{tot} \leq |\delta x_{ale}| + |\delta x_{sis}|$$

Atracción gravitatoria: test de modelos

Ricardo Decca

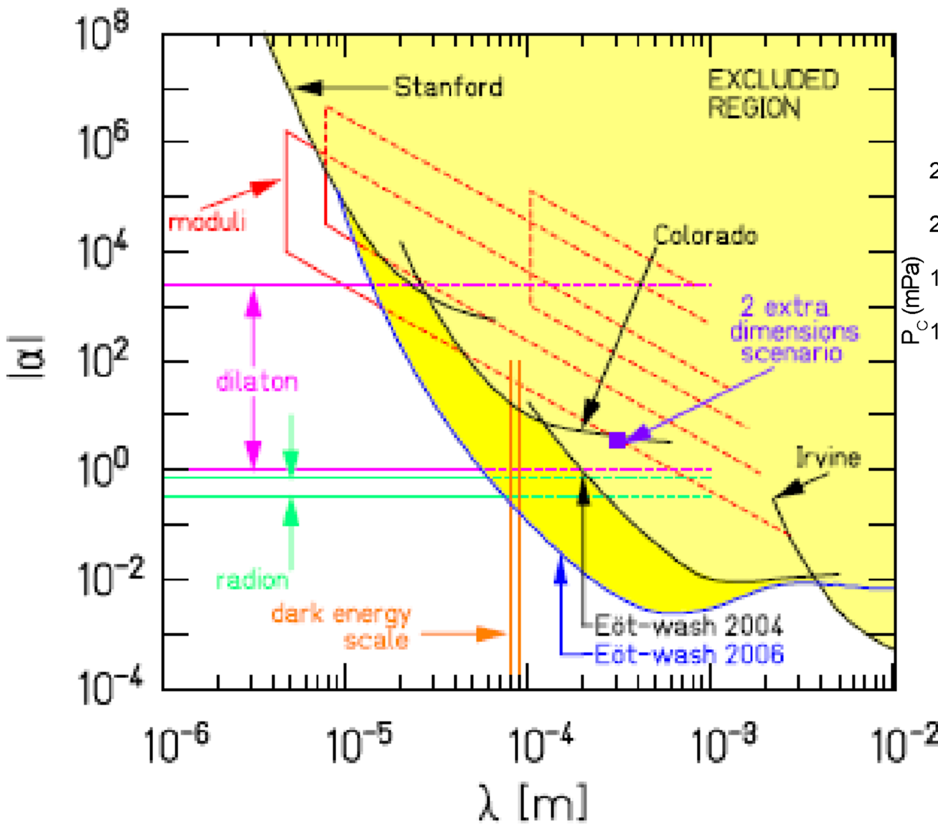
PHYSICAL REVIEW D **75**, 077101 (2007)

Tests of new physics from precise measurements of the Casimir pressure between two gold-coated plates

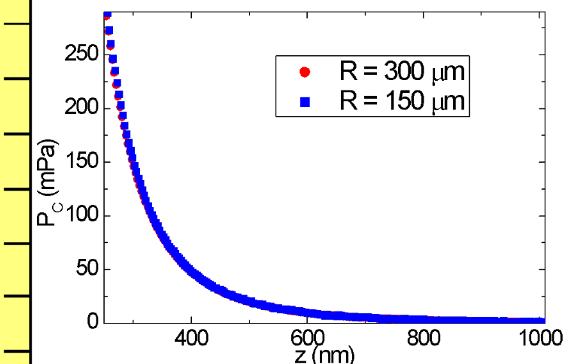
R. S. Decca,[1] D. López,[2] E. Fischbach,[3] G. L. Klimchitskaya,[4] D. E. Krause,[5,3] and V. M. Mostepanenko[6]

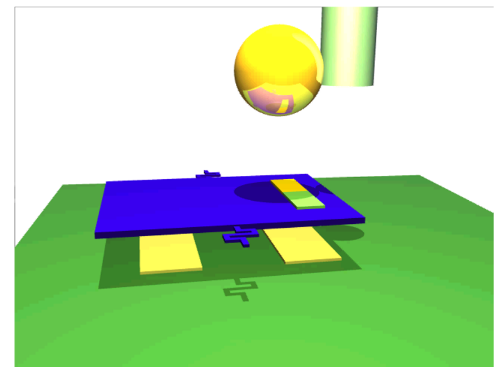
$$V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}\left(1+\alpha\cdot e^{-r/\lambda}\right)$$

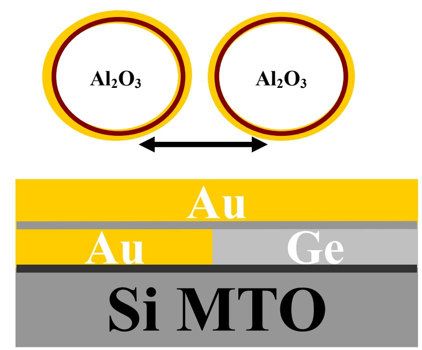
Potencial tipo "Yukawa"



Fuerza de Casimir



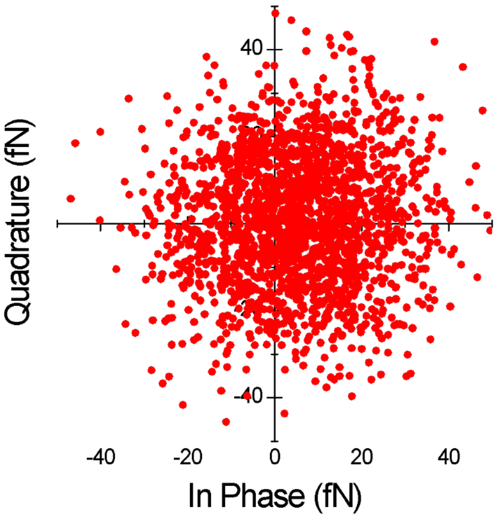




Atracción gravitatoria: test de modelos

z = 500 nm

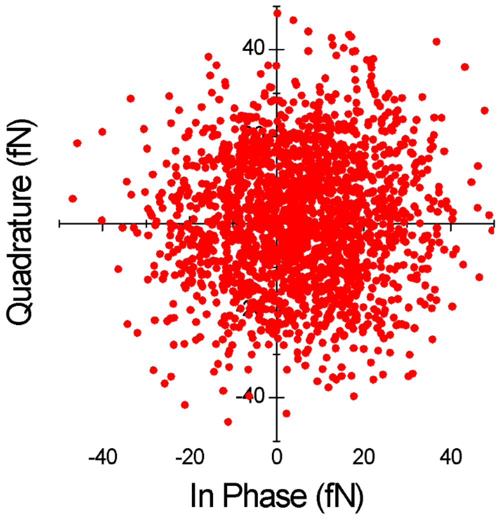
1 seg



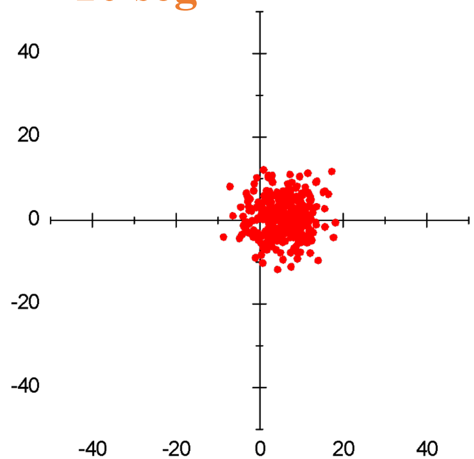
Atracción gravitatoria: test de modelos

z = 500 nm

1 seg

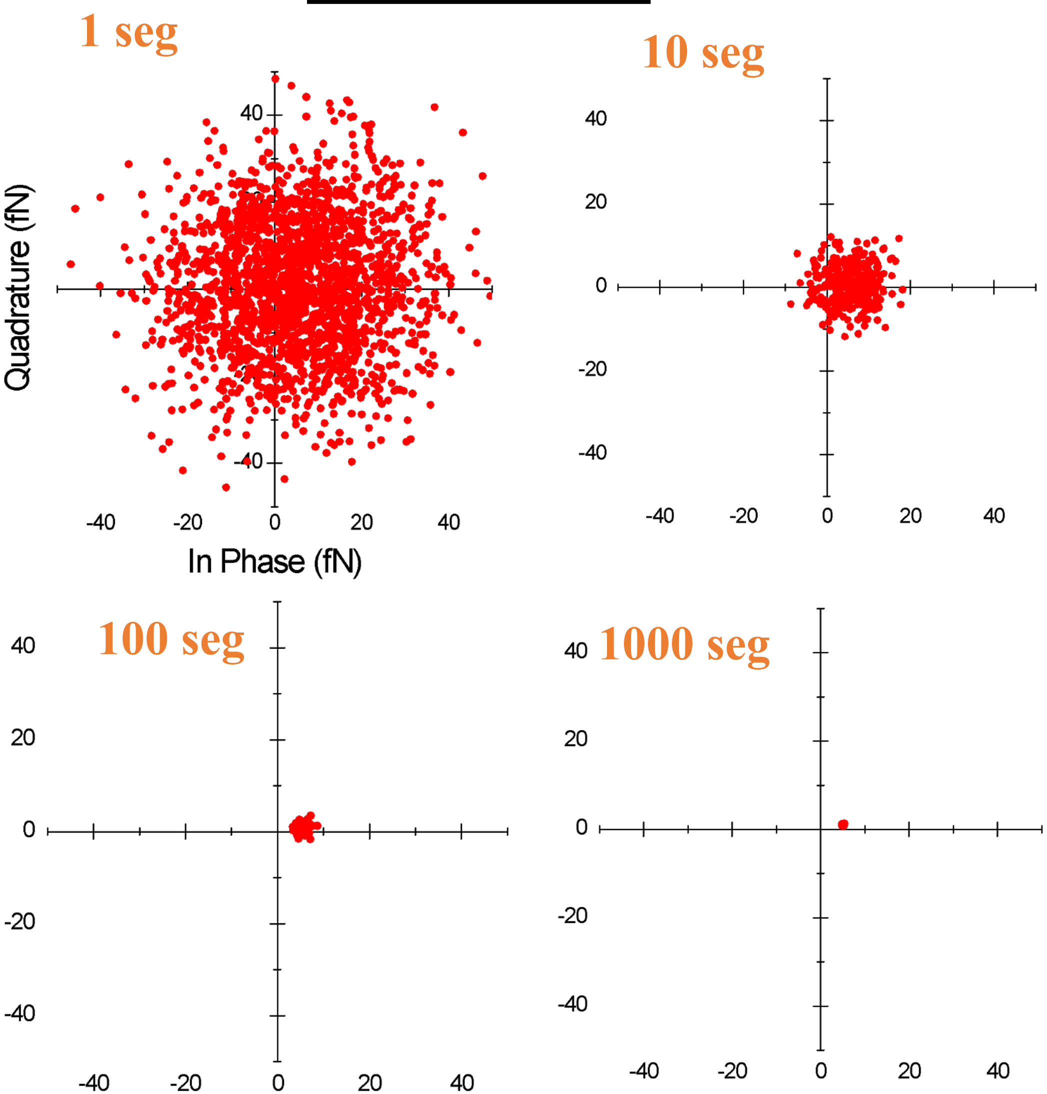


10 seg

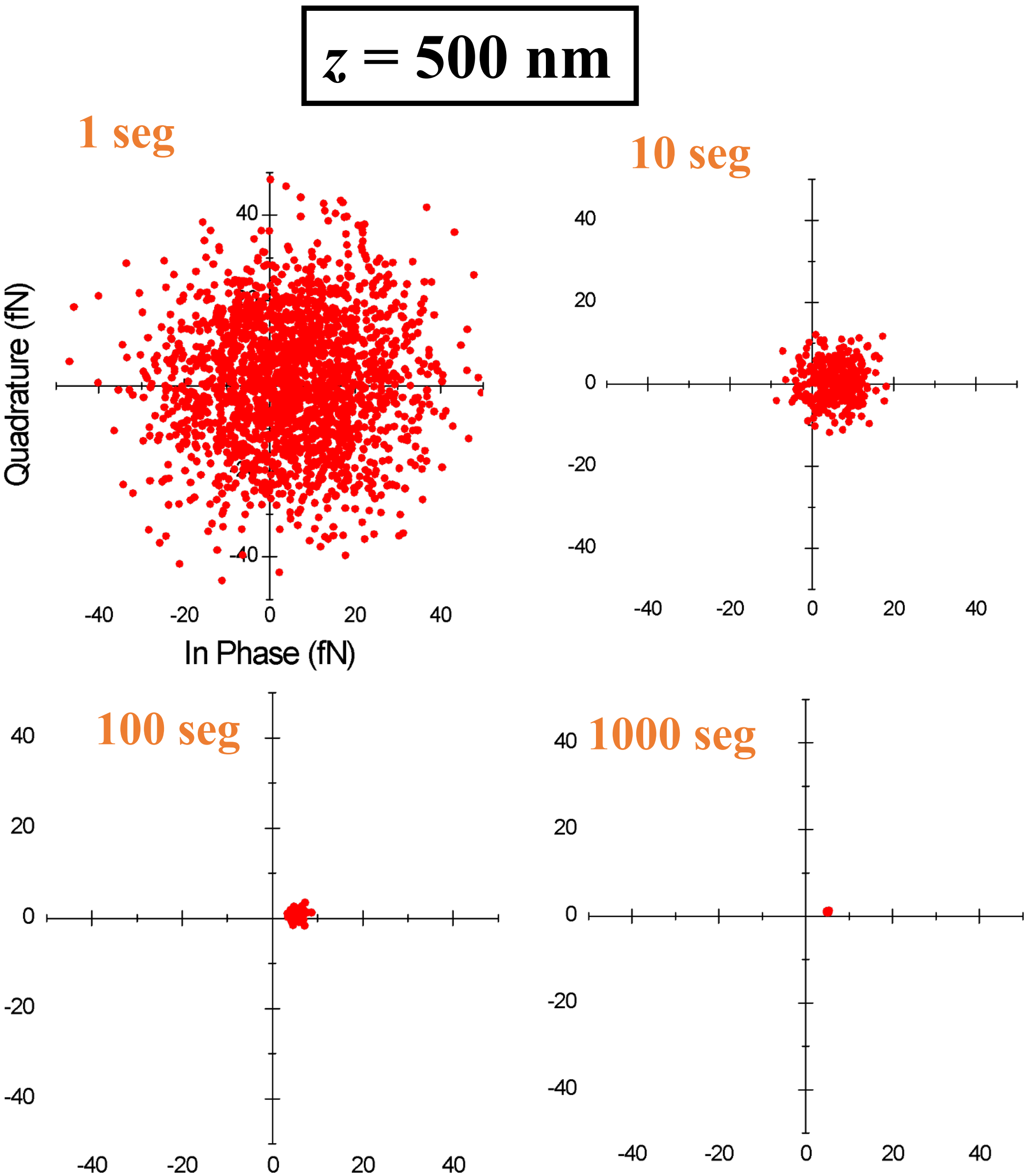


Atracción gravitatoria: test de modelos

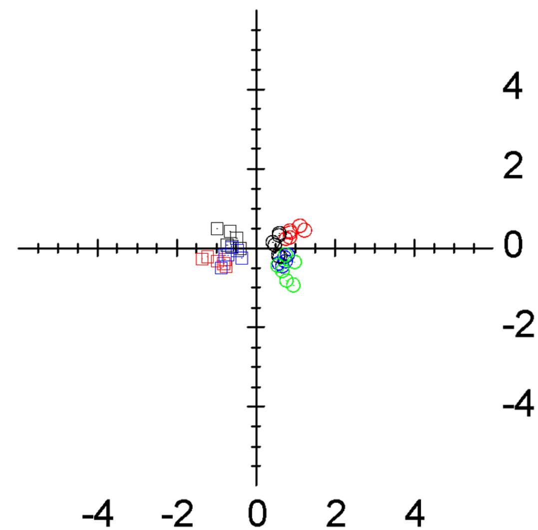
$z = 500$ nm



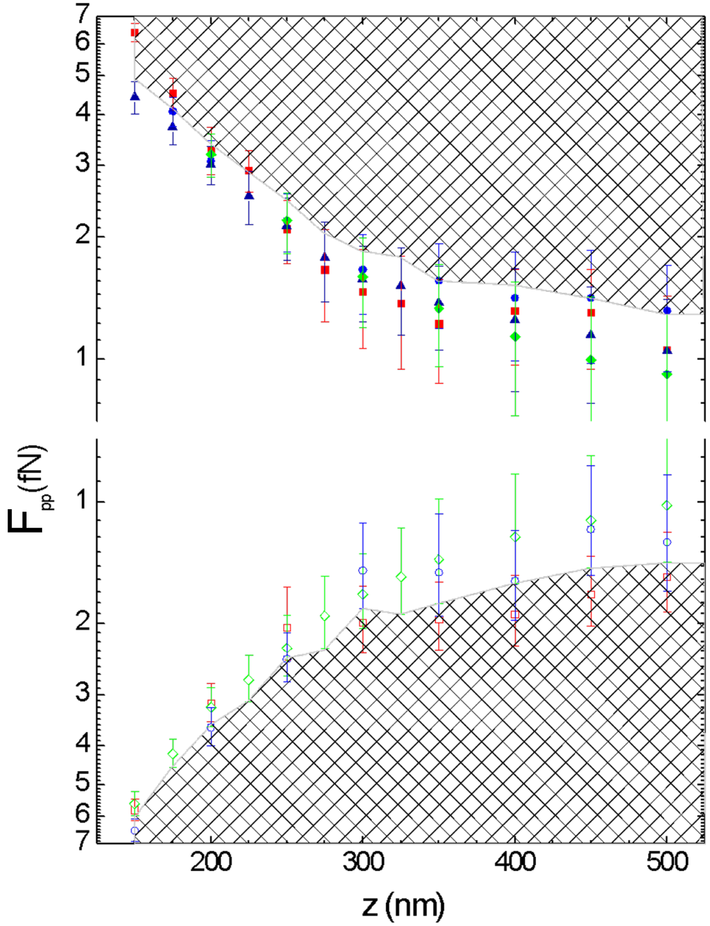
Atracción gravitatoria: test de modelos

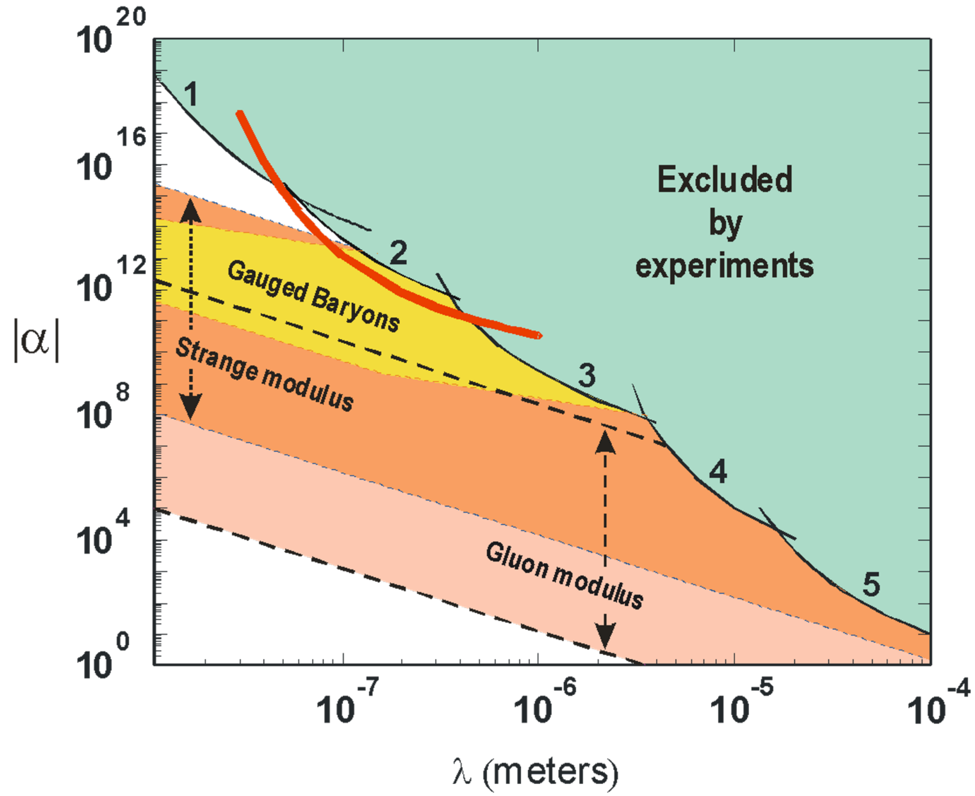


Test de consistencia: más muestras!



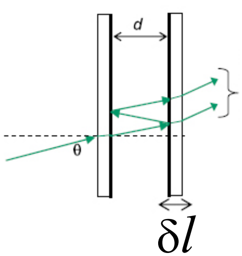
Atracción gravitatoria: test de modelos





La incertidumbre en el experimento…
y en la teoría

El “quiz” de la incerteza: aproximadamente cuál es?

1	 Centímetro costurero Medir una barra de ~12.345(1) cm	1cm	1mm	0.1mm
2	 l=10.0000(1) cm Medir una mesa de 1.2345(1) m	10cm	5cm	Menos pero no sé cuánto
3	 Microscopio óptico λ = 500nm Dibujar una raya	1cm	500nm	Mucho menos pero no sé cuánto
4	 Microscopio electrónico 10KeV - λ_B = 0.01nm Dibujar una raya	1μm	1nm	0.01nm
5	 Interferómetro óptico λ = 500nm Determinar δl	1cm	500nm	Mucho menos pero no sé cuánto