Física Experimental / Laboratorio I

Clase #3

Promedios pesados

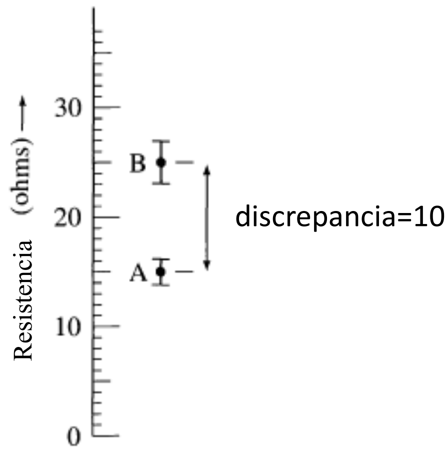
El problema?: cómo combinar dos mediciones independientes de *la misma* cantidad física:

$$x = x_A \pm \sigma_A \qquad\qquad x = x_B \pm \sigma_B.$$

Promedios pesados

El problema?: cómo combinar dos mediciones independientes de *la misma* cantidad física:

$$x = x_A \pm \sigma_A \qquad\qquad x = x_B \pm \sigma_B.$$



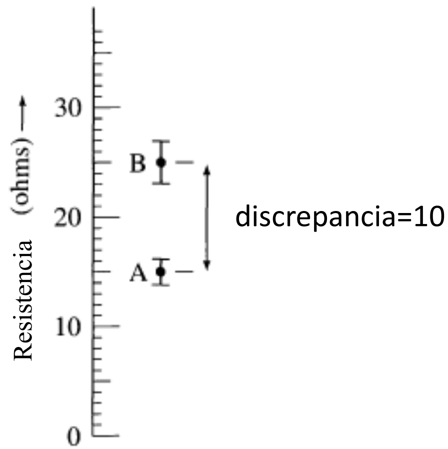
Caso #1: Mediciones *inconsistentes*

$$|x_A - x_B| >> \sigma_A, \sigma_B$$

Promedios pesados

El problema?: cómo combinar dos mediciones independientes de *la misma* cantidad física:

$$x = x_A \pm \sigma_A \qquad\qquad x = x_B \pm \sigma_B.$$



Caso #1: Mediciones *inconsistentes*

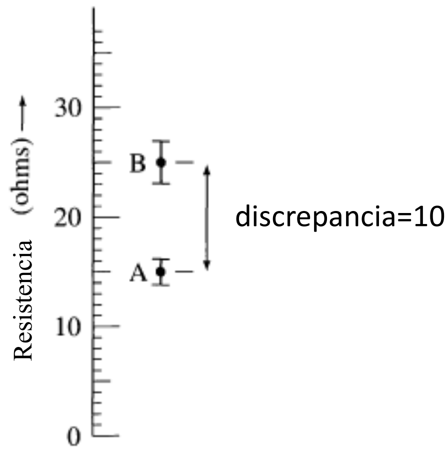
$$|x_A - x_B| >> \sigma_A, \sigma_B$$

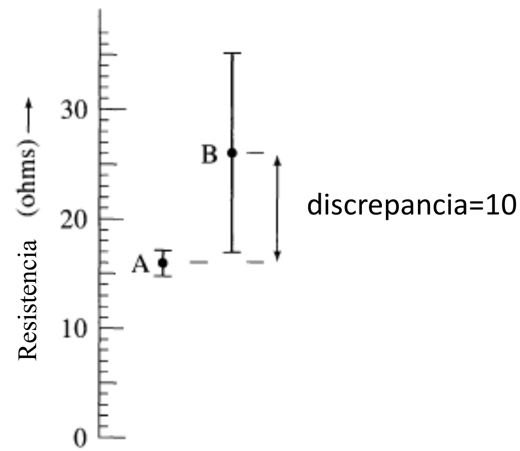
$$x_{exp} = (x_A + x_B)/2$$
$$\sigma_x = |x_A - x_B|/2$$

Promedios pesados

El problema?: cómo combinar dos mediciones independientes de *la misma* cantidad física:

$$x = x_A \pm \sigma_A \qquad\qquad x = x_B \pm \sigma_B.$$





Caso #1: Mediciones *inconsistentes*

$$|x_A - x_B| >> \sigma_A, \sigma_B$$

$$x_{exp} = (x_A + x_B)/2$$
$$\sigma_x = |x_A - x_B|/2$$

Caso #2: Mediciones ***consistentes***

$$|x_A - x_B| \cancel{>>} \sigma_A, \sigma_B$$

Promedios pesados

$$Prob(x_A) \propto \frac{1}{\sigma_A} e^{-(x_A - X)^2/2\sigma_A^2}$$

$$Prob(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_B} e^{-(x_B - X)^2/2\sigma_B^2}$$

Promedios pesados

$$Prob(x_A) \propto \frac{1}{\sigma_A} e^{-(x_A - X)^2/2\sigma_A^2}$$
$$Prob(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_B} e^{-(x_B - X)^2/2\sigma_B^2}$$

Suponiendo que ambos experimentos son independientes,

$$Prob(x_A, x_B) = Prob(x_A) \times Prob(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_A \sigma_B} e^{-\chi^2/2}$$

donde $\chi^2 = \left(\frac{x_A - X}{\sigma_A}\right)^2 + \left(\frac{x_B - X}{\sigma_B}\right)^2$

Promedios pesados

$$Prob(x_A) \propto \frac{1}{\sigma_A} e^{-(x_A - X)^2/2\sigma_A^2}$$

$$Prob(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_B} e^{-(x_B - X)^2/2\sigma_B^2}$$

Suponiendo que ambos experimentos son independientes,

$$Prob(x_A, x_B) = Prob(x_A) \times Prob(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_A \sigma_B} e^{-\chi^2/2}$$

donde $\chi^2 = \left(\frac{x_A - X}{\sigma_A}\right)^2 + \left(\frac{x_B - X}{\sigma_B}\right)^2$

Aplicando el principio de máxima verosimilitud, maximizar $Prob(x_A, x_B)$ es equivalente a *minimizar* χ^2 (por eso se llama "método de cuadrados minimos"):

$$\frac{x_A - X}{\sigma_A^2} + \frac{x_B - X}{\sigma_B^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\text{mejor estimador de } X) = \left(\frac{x_A}{\sigma_A^2} + \frac{x_B}{\sigma_B^2}\right) / \left(\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_B^2}\right)$$

Promedios pesados

$$Prob(x_A) \propto \frac{1}{\sigma_A} e^{-(x_A - X)^2/2\sigma_A^2}$$
$$Prob(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_B} e^{-(x_B - X)^2/2\sigma_B^2}$$

Suponiendo que ambos experimentos son independientes,

$$Prob(x_A, x_B) = Prob(x_A) \times Prob(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_A \sigma_B} e^{-\chi^2/2}$$

donde $\chi^2 = \left(\frac{x_A - X}{\sigma_A}\right)^2 + \left(\frac{x_B - X}{\sigma_B}\right)^2$

Aplicando el principio de máxima verosimilitud, maximizar $Prob(x_A,x_B)$ es equivalente a *minimizar* χ^2 (por eso se llama "método de cuadrados minimos"):

$$\frac{x_A - X}{\sigma_A^2} + \frac{x_B - X}{\sigma_B^2} = 0 \Rightarrow (\text{mejor estimador de } X) = \left(\frac{x_A}{\sigma_A^2} + \frac{x_B}{\sigma_B^2}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_B^2}\right)$$

Si definimos los ``pesos" $w_A = 1/\sigma_A^2$ y $w_B = 1/\sigma_B^2$ $\Rightarrow$ $(\text{mejor estimador de } X) = \frac{w_A x_A + w_B x_B}{w_A + w_B}$

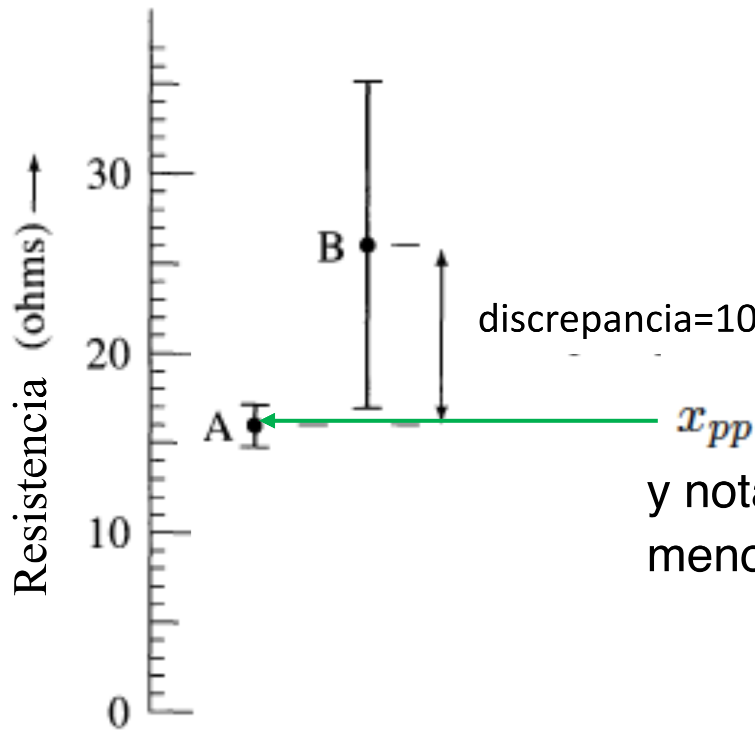
En general

$$\boxed{x_{pp} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}} \quad \text{Con } w_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \quad \text{y} \quad \boxed{\sigma_{pp} = \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}}}$$

Promedios pesados

El problema?: cómo combinar dos mediciones independientes de *la misma* cantidad física:

$$x = x_A \pm \sigma_A \qquad\qquad x = x_B \pm \sigma_B.$$



y notar que σ_{pp} es menor al menor de los dos, σ_A y σ_B

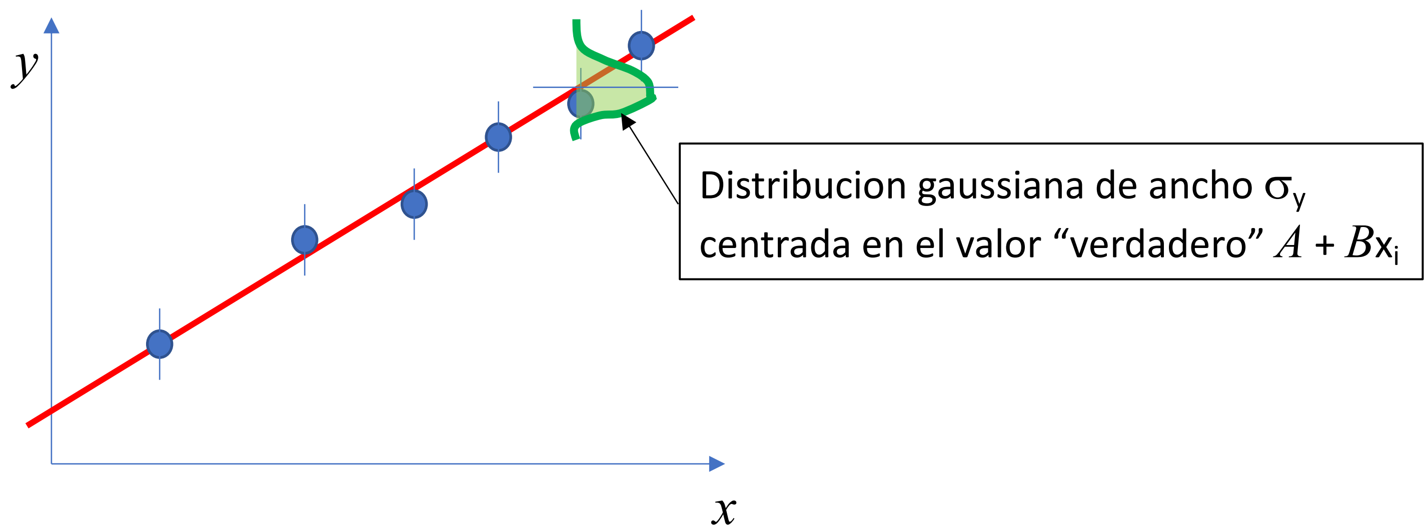
Caso #2: Mediciones ***consistentes***

$$|x_A - x_B| \cancel{\gg} \sigma_A, \sigma_B$$

Ajuste por cuadrados mínimos

Objetivo: encontrar la mejor línea recta $y = A^* + B^*x$ que ajuste un conjunto de pares de puntos medidos $(x_1, y_1),\ldots, (x_N, y_N)$.

Para simplificar supondremos que las mediciones de y están afectadas por incertezas, pero las de x no. Y supondremos que las incertezas en y siguen una distribución gaussiana, todas con *el mismo ancho* σ_y.



Ajuste por cuadrados mínimos

La probabilidad de obtener un dado par de valores (x_i, y_i) se obtiene como:

$$Prob_{A,B}(y_i) \propto \frac{1}{\sigma_y} e^{-(y_i - A - Bx_i)^2/2\sigma_y^2}$$

Entonces la probabilidad de obtener el conjunto completo de mediciones $y_1, \ldots, y_N$, entendidas como independientes es

$$Prob_{A,B}(y_1, \ldots, y_N) \propto \frac{1}{\sigma_y^N} e^{-\chi^2/2}$$

con $\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_y^2}$

Ajuste por cuadrados mínimos: determinación de A^* y B^*, y de sus incertezas

Los mejores estimadores para A y B son aquellos que maximizan esta probabilidad, y por lo tanto minimizan χ^2. Para encontrarlos diferenciamos χ^2 respecto a A y B, e igualamos a cero:

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial A} = \frac{-2}{\sigma_y^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - A - Bx_i) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial\chi^2}{\partial B} = \frac{-2}{\sigma_y^2}\sum_{i=1}^{N}x_i(y_i - A - Bx_i) = 0$$

Ajuste por cuadrados mínimos: determinación de A^* y B^*, y de sus incertezas

Los mejores estimadores para A y B son aquellos que maximizan esta probabilidad, y por lo tanto minimizan χ^2. Para encontrarlos diferenciamos χ^2 respecto a A y B, e igualamos a cero:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A} = \frac{-2}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - A - Bx_i) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \chi^2}{\partial B} = \frac{-2}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^{N} x_i(y_i - A - Bx_i) = 0$$

Estas corresponden a un sistema de dos ecuaciones para las dos incógnitas A y B,

$$AN + B\sum x_i = \sum y_i \qquad\qquad A\sum x_i + B\sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

de donde

$$\boxed{A^* = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}} \qquad \boxed{B^* = \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}} \quad \text{con} \quad \boxed{\Delta = N\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

Ajuste por cuadrados mínimos: determinación de A^* y B^*, y de sus incertezas

Los mejores estimadores para A y B son aquellos que maximizan esta probabilidad, y por lo tanto minimizan χ^2. Para encontrarlos diferenciamos χ^2 respecto a A y B, e igualamos a cero:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A} = \frac{-2}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - A - Bx_i) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial B} = \frac{-2}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^{N} x_i (y_i - A - Bx_i) = 0$$

Estas corresponden a un sistema de dos ecuaciones para las dos incógnitas A y B,

$$AN + B\sum x_i = \sum y_i \qquad A\sum x_i + B\sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

de donde

$$\boxed{A^* = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}} \qquad \boxed{B^* = \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}} \quad \text{con} \quad \boxed{\Delta = N\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

Los estimadores de A y B resultan ser funciones simples de los y_i. Sus incertezas pueden entonces encontrarse simplemente propagando errores:

$$\boxed{\sigma_{A^*} = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}} \qquad \boxed{\sigma_{B^*} = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}}$$

Ajuste por cuadrados mínimos: determinación de σ_y

La incerteza en y podría obtenerse de medir repetidas veces la cantidad y_i para un dado x_i. Por otro lado, es intuitivo pensar que lo mismo se puede lograr usando el conjunto ya obtenido de pares (x_1, y_1),…, (x_N, y_N) haciendo:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (y_i - A - Bx_i)^2}$$

Esta expresión puede también encontrarse con el principio de máxima verosimilitud, diferenciando respecto a σ_y.

Ajuste por cuadrados mínimos: determinación de σ_y

La incerteza en y podría obtenerse de medir repetidas veces la cantidad y_i para un dado x_i. Por otro lado, es intuitivo pensar que lo mismo se puede lograr usando el conjunto ya obtenido de pares $(x_1, y_1),\ldots, (x_N, y_N)$ haciendo:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N}\sum (y_i - A - Bx_i)^2}$$

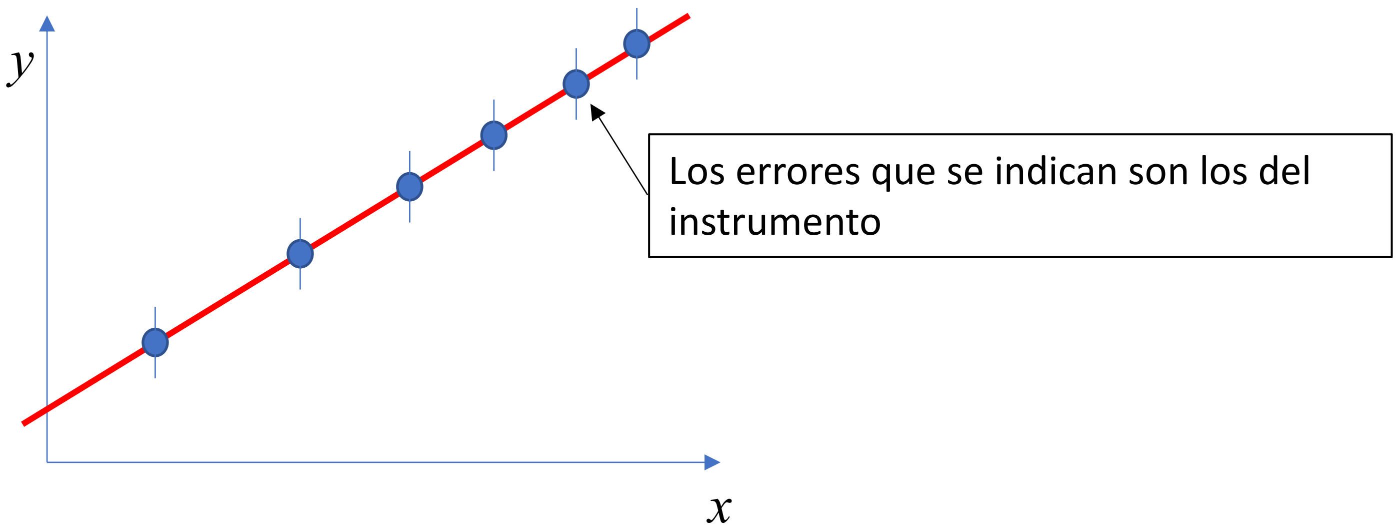
Esta expresión puede también encontrarse con el principio de máxima verosimilitud, diferenciando respecto a σ_y.

El problema igual que antes es que no conocemos a A y B, sino a sus estimadores. Se puede demostrar que la expresión correcta cuando se usan los estimadores es:

$$\boxed{\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum (y_i - A^* - B^*x_i)^2}}$$

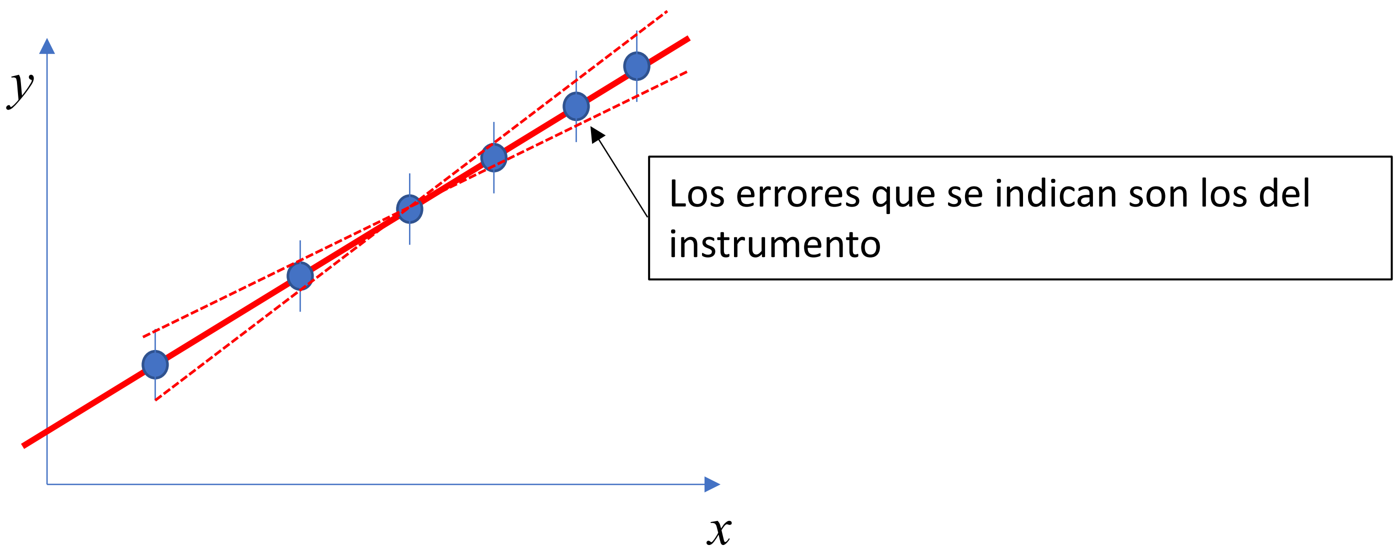
Cómo tener en cuenta los errores sistemáticos/instrumentales?

Puede ocurrir que los errores del ajuste sean mínimos comparado con los errores sistemáticos:



Cómo tener en cuenta los errores sistemáticos/instrumentales?

Puede ocurrir que los errores del ajuste sean mínimos comparado con los errores sistemáticos:



Sugerencia 1: estimar la máxima y mínima pendiente posible compatible con esas incertezas

Sugerencia 2: elegir un valor de x en la mitad de la escala y propagar para ese valor las incertezas de los instrumentos utilizados

$$\frac{\delta B_{inst}}{B} = \sqrt{\left(\frac{\delta y_{inst}}{y}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_{inst}}{x}\right)^2}$$

En ambos casos

$$\boxed{\delta B = \sqrt{(\delta B_{ajuste})^2 + (\delta B_{inst})^2}}$$

Covarianza

Buscamos evaluar $q(x,y)$

Medimos dos cantidades x e y, obteniendo N pares (x_1, y_1), …, (x_N, y_N).

De las N mediciones x_1, …, x_N se puede computar $\overline{x}$ y σ_x,

De las mediciones y_1, …, y_N se puede computar $\overline{y}$ y σ_y.

De manera similar, podemos calcular N veces $q_i = q(x_i, y_i)$, y de ahí $\overline{q}$ y σ_q.

Covarianza

Buscamos evaluar $q(x,y)$

Medimos dos cantidades x e y, obteniendo N pares de (x_1, y_1), …, (x_N, y_N).

De las N mediciones x_1, …, x_N se puede computar $\overline{x}$ y σ_x,

De las mediciones y_1, …, y_N se puede computar $\overline{y}$ y σ_y.

De manera similar, podemos calcular N veces $q_i = q(x_i, y_i)$, y de ahí $\overline{q}$ y σ_q.

Suponemos que las incertezas son pequeñas, y que por lo tanto los x_i están cerca de $\overline{x}$ y los y_i están cerca de $\overline{y}$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
q_i &= q(x_i, y_i) \\
&\approx q(\overline{x}, \overline{y}) + \frac{\partial q}{\partial x}(x_i - \overline{x}) + \frac{\partial q}{\partial y}(y_i - \overline{y})
\end{aligned}
$$

Las derivadas parciales son evaluadas en $\overline{x}$ y en $\overline{y}$, y por lo tanto son constantes y las mismas para todo i.

Covarianza

Buscamos evaluar $q(x,y)$
Medimos dos cantidades x e y, obteniendo N pares de (x_1, y_1), …, (x_N, y_N).
De las N mediciones x_1, …, x_N se puede computar $\overline{x}$ y σ_x,
De las mediciones y_1, …, y_N se puede computar $\overline{y}$ y σ_y.
De manera similar, podemos calcular N veces $q_i = q(x_i, y_i)$, y de ahí $\overline{q}$ y σ_q.

Suponemos que las incertezas son pequeñas, y que por lo tanto los x_i están cerca de $\overline{x}$ y los y_i están cerca de $\overline{y}$. Entonces:

$$\begin{aligned} q_i &= q(x_i, y_i) \\ &\approx q(\overline{x}, \overline{y}) + \frac{\partial q}{\partial x}(x_i - \overline{x}) + \frac{\partial q}{\partial y}(y_i - \overline{y}) \end{aligned}$$

Las derivadas parciales son evaluadas en $\overline{x}$ y en $\overline{y}$, y por lo tanto son constantes y las mismas para todo i. Entonces

$$\begin{aligned} \overline{q} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} q_i \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[q(\overline{x}, \overline{y}) + \frac{\partial q}{\partial x}(x_i - \overline{x}) + \frac{\partial q}{\partial y}(y_i - \overline{y})\right] = q(\overline{x}, \overline{y}) \end{aligned}$$

Covarianza

La desviación estándar para los N valores q_i es entonces

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{N-1}\sum(q_i - \overline{q})^2 = \frac{1}{N-1}\sum\left[\frac{\partial q}{\partial x}(x_i - \overline{x}) + \frac{\partial q}{\partial y}(y_i - \overline{y})\right]^2$$

$$= \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{N-1}\sum(x_i - \overline{x})^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{N-1}\sum(y_i - \overline{y})^2$$

$$+ 2\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}\frac{1}{N-1}\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

Covarianza

La desviación estándar para los N valores q_i es entonces

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{N-1}\sum(q_i-\overline{q})^2 = \frac{1}{N-1}\sum\left[\frac{\partial q}{\partial x}(x_i-\overline{x}) + \frac{\partial q}{\partial y}(y_i-\overline{y})\right]^2$$

$$= \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{N-1}\sum(x_i-\overline{x})^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{N-1}\sum(y_i-\overline{y})^2$$

$$+ 2\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}\frac{1}{N-1}\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$$

de donde

$$\boxed{\sigma_q^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + 2\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}\sigma_{xy}}$$

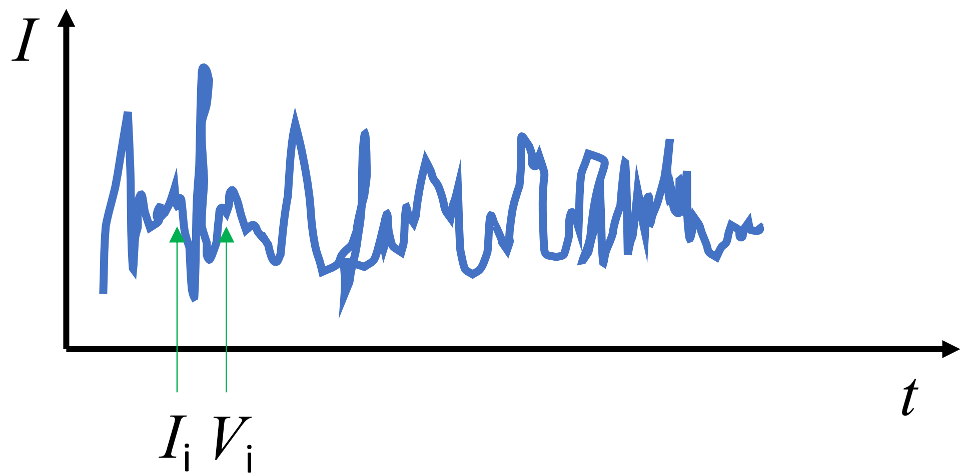
con la “covarianza” definida como

$$\boxed{\sigma_{xy} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}$$

Ejemplo #1: Resistencia y potencia en el método de 4 puntas

Buscamos medir una resistencia R como $R = V/I$, y la potencia disipada como $P = V.I$

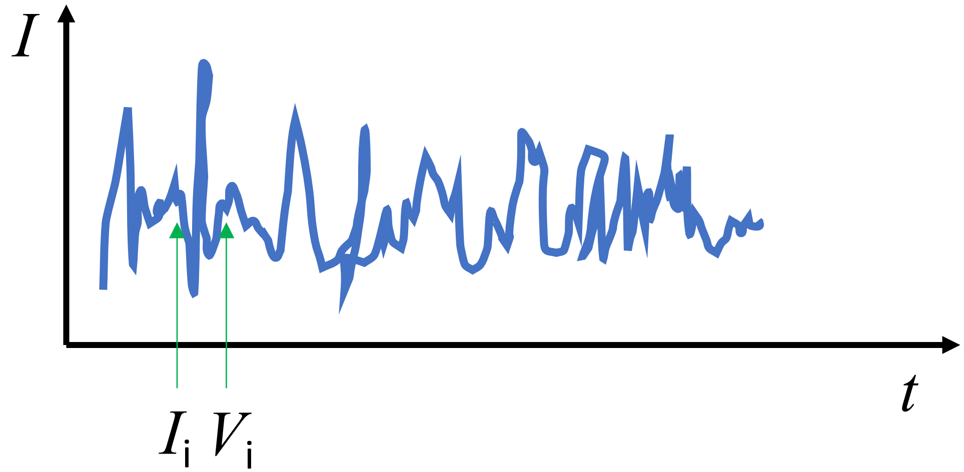
Caso #1: las fluctuaciones en la corriente son tan *rápidas* que al medir la tensión ambas incertezas son ***independientes***



Ejemplo #1: Resistencia y potencia en el método de 4 puntas

Buscamos medir una resistencia R como $R = V/I$, y la potencia disipada como $P = V.I$

Caso #1: las fluctuaciones en la corriente son tan *rápidas* que al medir la tensión ambas incertezas son ***independientes***



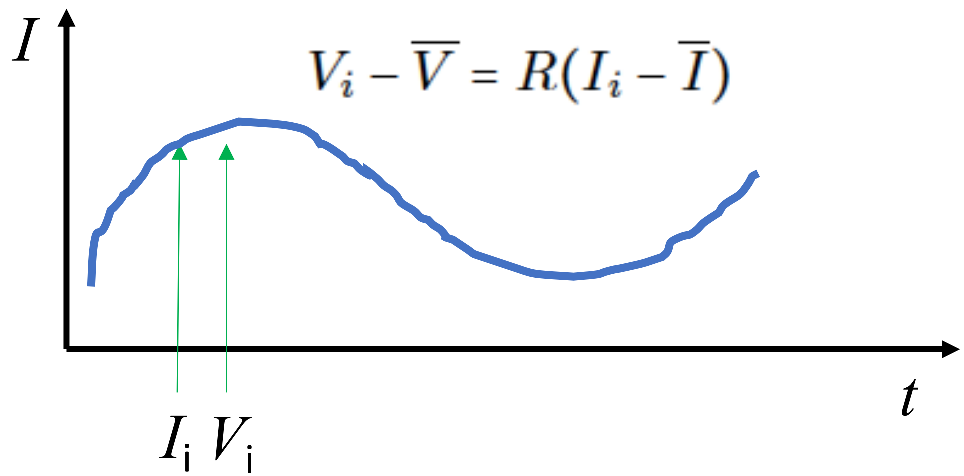
$$(\delta R)^2 = \frac{1}{I^2}\delta V^2 + \left(\frac{V}{I^2}\right)^2 \delta I^2 = \frac{1}{I^2}(\delta V^2 + R^2 \delta I^2)$$

$$(\delta P)^2 = I^2 \delta V^2 + V^2 \delta I^2 = I^2(\delta V^2 + R^2 \delta I^2)$$

Ejemplo #1: Resistencia y potencia en el método de 4 puntas

Buscamos medir una resistencia R como $R = V/I$, y la potencia disipada como $P = V.I$

Caso #2: las fluctuaciones en la corriente son tan *lentas* que al medir la tensión ambas incertezas son ***dependientes***

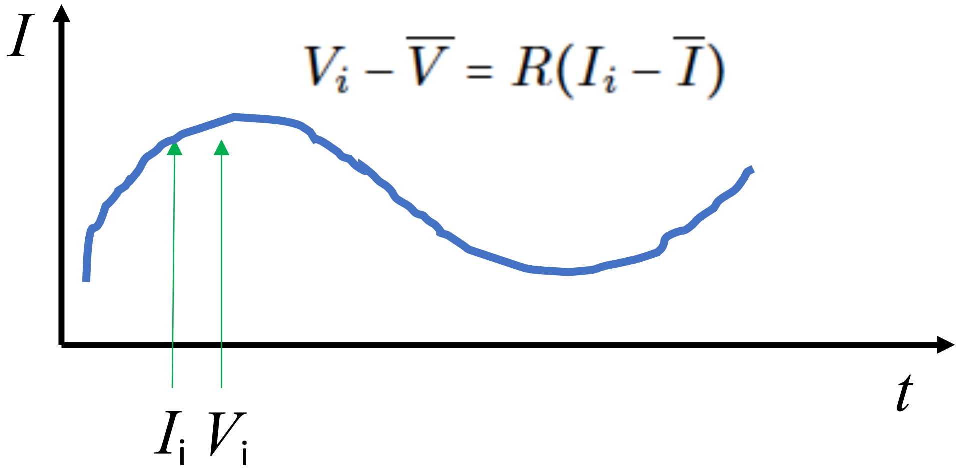


Ejemplo #1: Resistencia y potencia en el método de 4 puntas

Buscamos medir una resistencia R como $R = V/I$, y la potencia disipada como $P = V.I$

Caso #2: las fluctuaciones en la corriente son tan *lentas* que al medir la tensión ambas incertezas son ***dependientes***

$$V_i - \overline{V} = R(I_i - \overline{I})$$

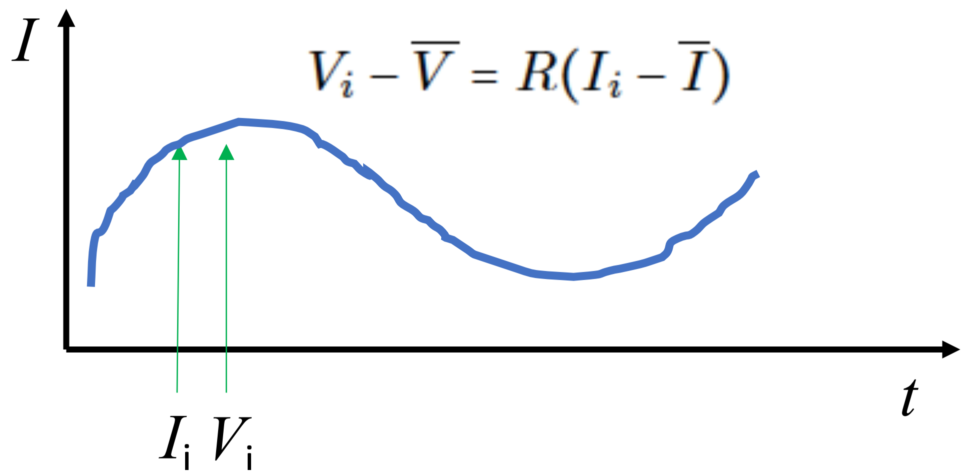


En este caso entonces $$\sigma_{VI}^2 = \frac{1}{N-1}\sum (V_i - \overline{V})(I_i - \overline{I}) = R\sigma_I^2$$

Ejemplo #1: Resistencia y potencia en el método de 4 puntas

Buscamos medir una resistencia R como $R = V/I$, y la potencia disipada como $P = V.I$

Caso #2: las fluctuaciones en la corriente son tan *lentas* que al medir la tensión ambas incertezas son ***dependientes***



$$V_i - \overline{V} = R(I_i - \overline{I})$$

En este caso entonces $\sigma_{VI}^2 = \frac{1}{N-1}\sum(V_i - \overline{V})(I_i - \overline{I}) = R\sigma_I^2$

$$(\delta R)^2 = \frac{1}{I^2}(\delta V^2 + R^2\delta I^2) + 2\frac{1}{I}\left(-\frac{V}{I^2}\right)R\delta I^2$$

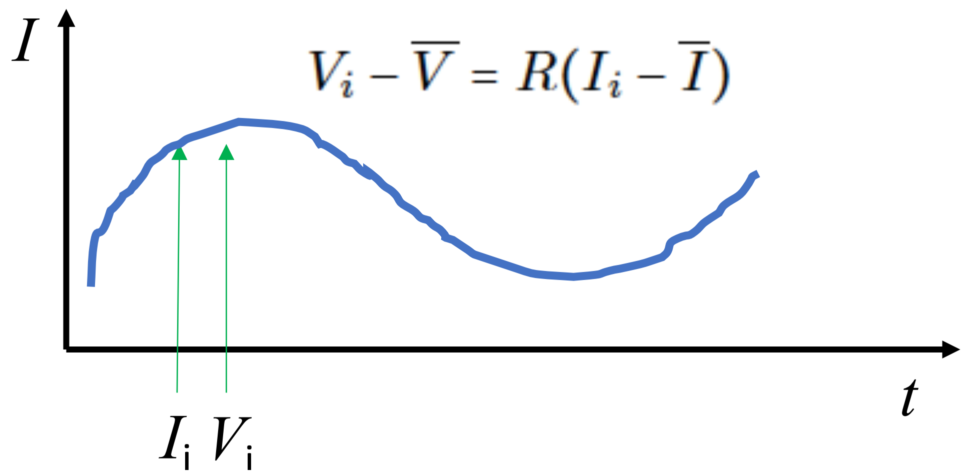
$$= \frac{R^2}{I^2}\left(2\delta I^2\right) - 2\frac{VR}{I^3}\delta I^2$$

$$= \frac{R^2}{I^2}\left(2\delta I^2\right) - \frac{R^2}{I^2}\left(2\delta I^2\right) = 0!!$$

Ejemplo #1: Resistencia y potencia en el método de 4 puntas

Buscamos medir una resistencia R como $R = V/I$, y la potencia disipada como $P = V.I$

Caso #2: las fluctuaciones en la corriente son tan *lentas* que al medir la tensión ambas incertezas son ***dependientes***



En este caso entonces $$\sigma_{VI}^2 = \frac{1}{N-1}\sum(V_i - \overline{V})(I_i - \overline{I}) = R\sigma_I^2$$

Mientras que

$$(\delta P)^2 = I^2R^2(2\delta I)^2 + 2VIR\delta I^2 = 4I^2R^2\delta I^2 \neq 0$$

Recordar que el caso no correlacionado era

$$(\delta P)^2 = I^2\delta V^2 + V^2\delta I^2 = I^2(\delta V^2 + R^2\delta I^2)$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

Consideremos un ajuste lineal por cuadrados mínimos $y = a + bx$, que resulta en los mejores estimadores

$$a^* = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \qquad b^* = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

Consideremos un ajuste lineal por cuadrados mínimos $y = a + bx$, que resulta en los mejores estimadores

$$a^* = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \qquad\qquad b^* = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

Consideremos el punto $\overline{x} = \frac{\sum x}{N}$ y $\overline{y} = \frac{\sum y}{N}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
a^* + b^* \overline{x} &= \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy + \left[\sum xy \sum x - \left(\sum x\right)^2 \frac{\sum y}{N}\right]}{N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \\
&= \frac{\sum y}{N} \left[\frac{N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}{N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}\right] \\
&= \overline{y}
\end{aligned}$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

Consideremos un ajuste lineal por cuadrados mínimos $y = a + bx$, que resulta en los mejores estimadores

$$a^* = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \qquad\qquad b^* = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

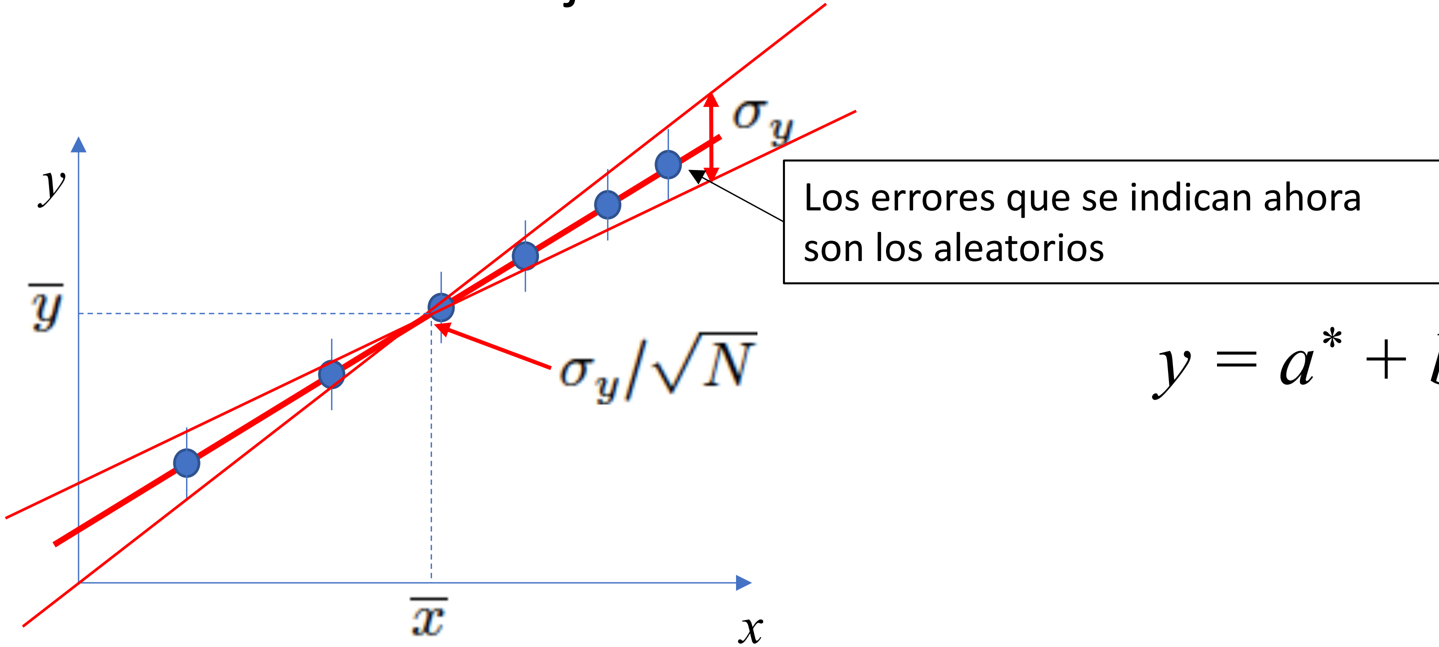
Consideremos el punto $\overline{x} = \frac{\sum x}{N}$ y $\overline{y} = \frac{\sum y}{N}$. Entonces:

$$\begin{aligned} a^* + b^*\overline{x} &= \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy + \left[\sum xy \sum x - \left(\sum x\right)^2 \frac{\sum y}{N}\right]}{N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \\ &= \frac{\sum y}{N}\left[\frac{N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}{N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}\right] \\ &= \overline{y} \end{aligned}$$

Es decir: el punto $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$ es solución de la ecuación lineal ajustada.

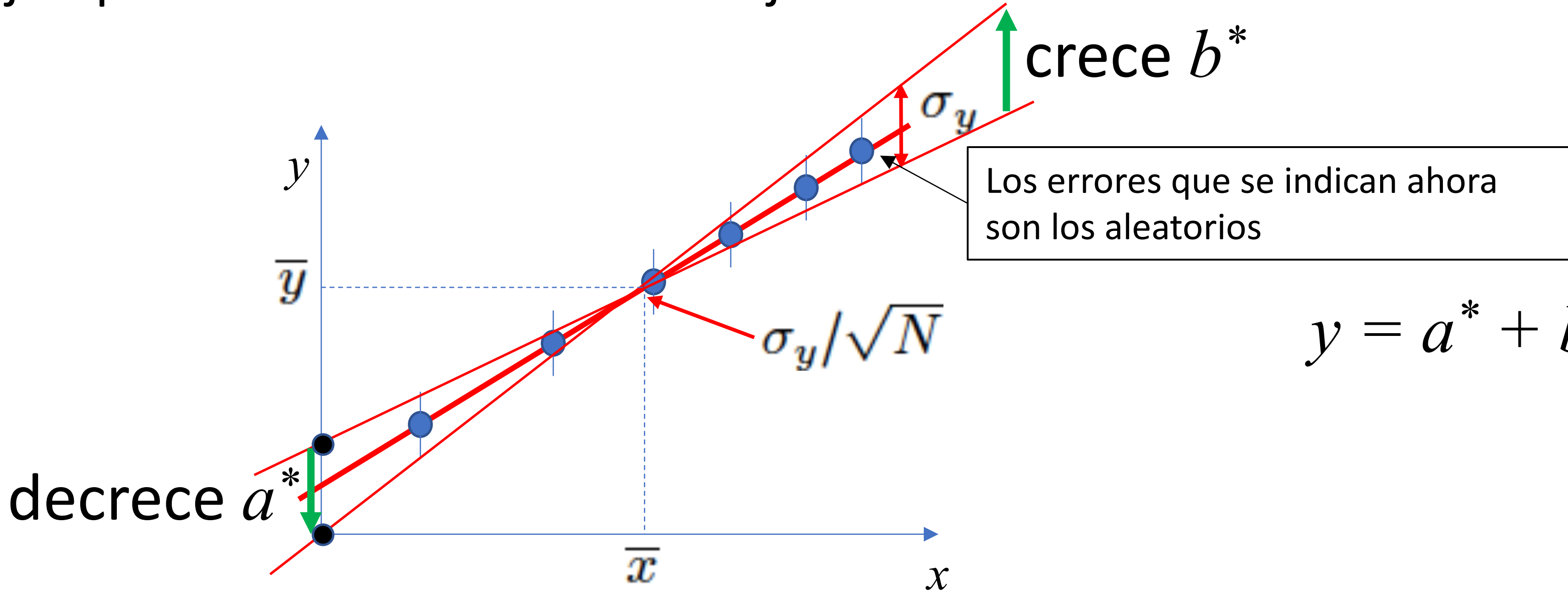
Notar que sus fluctuaciones son del orden de $\sigma_y / \sqrt{N}$, mientras que las fluctuaciones de los puntos individuales son del orden de σ_y.

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal



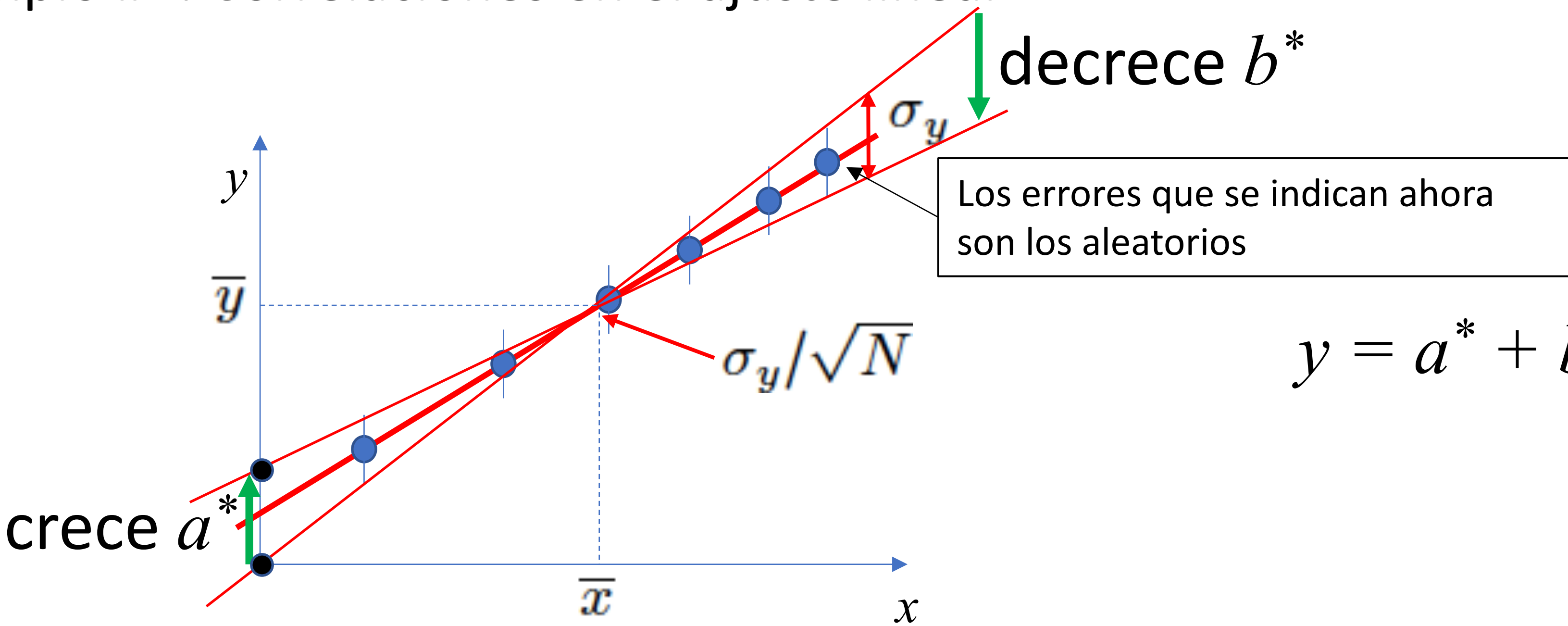
$$y = a^* + b^* x$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal



$$y = a^* + b^* x$$

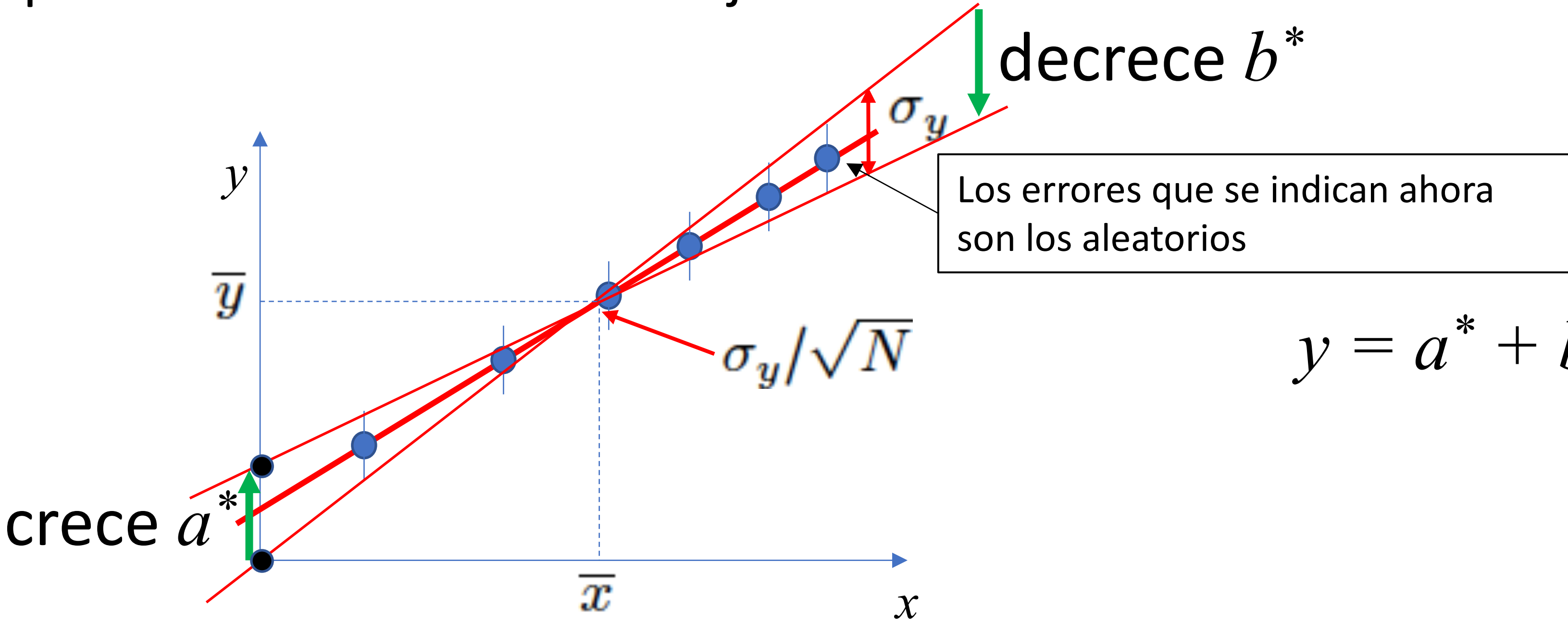
Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal



$$y = a^* + b^* x$$

Es decir que a* y b* están fuertemente correlacionados.

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal



$$y = a^* + b^* x$$

Es decir que a* y b* están fuertemente correlacionados.

La pregunta es entonces cuánto vale

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{M-1}\sum_{R=1}^{M}(a_R - \overline{a})(b_R - \overline{b})$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

La filosofía de esto es realizar una serie de ajustes del tipo

$$
\begin{array}{ccc}
(x_1, y_1^1)(x_2, y_2^1)\text{.......}(x_N, y_N^1) \rightarrow & a_1, b_1 \\
(x_1, y_1^2)(x_2, y_2^2)\text{.......}(x_N, y_N^2) \rightarrow & a_2, b_2 \\
\vdots & \vdots \\
(x_1, y_1^R)(x_2, y_2^R)\text{.......}(x_N, y_N^R) \rightarrow & a_R, b_R \\
\vdots & \vdots \\
(x_1, y_1^M)(x_2, y_2^M)\text{.......}(x_N, y_N^M) \rightarrow & a_M, b_M
\end{array}
$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

La filosofía de esto es realizar una serie de ajustes del tipo

$$
\begin{array}{c}
(x_1, y_1^1)(x_2, y_2^1).......(x_N, y_N^1) \rightarrow a_1, b_1 \\
(x_1, y_1^2)(x_2, y_2^2).......(x_N, y_N^2) \rightarrow a_2, b_2 \\
\vdots \\
(x_1, y_1^R)(x_2, y_2^R).......(x_N, y_N^R) \rightarrow a_R, b_R \\
\vdots \\
(x_1, y_1^M)(x_2, y_2^M).......(x_N, y_N^M) \rightarrow a_M, b_M
\end{array}
$$

de donde obtenemos

$$(x_1, \overline{y_1})(x_2, \overline{y_2}).......(x_N, \overline{y_N}) \rightarrow \overline{a}, \overline{b}$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

Desarrollando a_{R} y b_{R} alrededor de sus valores medios tenemos que

$$a_R = \overline{a} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a}{\partial y_i}(y_i^R - \overline{y_i})$$

$$b_R = \overline{b} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial b}{\partial y_j}(y_j^R - \overline{y_j})$$

de donde

$$\begin{aligned}\sigma_{ab} &= \frac{1}{M-1}\sum_{R=1}^{M}\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a}{\partial y_i}(y_i^R - \overline{y_i}) \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial b}{\partial y_j}(y_j^R - \overline{y_j})\right] \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a}{\partial y_i}\frac{\partial b}{\partial y_j}\left[\frac{1}{M-1}\sum_{R=1}^{M}(y_i^R - \overline{y_i})(y_j^R - \overline{y_j})\right]\end{aligned}$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

Desarrollando a_R y b_R alrededor de sus valores medios tenemos que

$$a_R = \overline{a} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a}{\partial y_i}(y_i^R - \overline{y_i})$$

$$b_R = \overline{b} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial b}{\partial y_j}(y_j^R - \overline{y_j})$$

de donde

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{M-1}\sum_{R=1}^{M}\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a}{\partial y_i}(y_i^R - \overline{y_i}) \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial b}{\partial y_j}(y_j^R - \overline{y_j})\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a}{\partial y_i}\frac{\partial b}{\partial y_j}\left[\frac{1}{M-1}\sum_{R=1}^{M}(y_i^R - \overline{y_i})(y_j^R - \overline{y_j})\right]$$

Podemos ver entonces que si todos los y_i son independientes, el producto

$$\frac{1}{M-1}\sum_{R=1}^{M}(y_i^R - \overline{y_i})(y_j^R - \overline{y_j}) = \delta_{ij}\sigma_y^2$$

es decir,

$$\boxed{\sigma_{ab} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a}{\partial y_i}\frac{\partial b}{\partial y_i}\sigma_y^2}$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

$$\sigma_{ab} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a}{\partial y_i} \frac{\partial b}{\partial y_i} \sigma_y^2 \qquad a^* = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \qquad b^* = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

Es fácil ver que

$$\frac{\partial a}{\partial y_i} = \frac{\sum x^2 - x_i \sum x}{\Delta}$$

$$\frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{N x_i - \sum x}{\Delta}$$

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

$$\sigma_{ab} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a}{\partial y_i} \frac{\partial b}{\partial y_i} \sigma_y^2 \qquad a^* = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \qquad b^* = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

Es fácil ver que

$$\frac{\partial a}{\partial y_i} = \frac{\sum x^2 - x_i \sum x}{\Delta}$$

$$\frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{N x_i - \sum x}{\Delta}$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a}{\partial y_i} \frac{\partial b}{\partial y_i} = -\frac{\sum x}{\Delta}$$

Finalmente entonces,

$$\boxed{\sigma_{ab} = -\frac{\sum x}{\Delta} \sigma_y^2}$$

Esto implica que uno puede calcular la covarianza σ_{ab} con una *única* medición y por lo tanto una única determinación de a y b.

Ejemplo #2: Correlaciones en el ajuste lineal

Cuál es la relevancia de este resultado?.

Supongamos tener un ajuste lineal de la forma $y = a + bx$, y con esto queremos inter o extrapolar el valor $y_0 = a + bx_0$. La pregunta es cuánto vale la incerteza de y_0?

y la respuesta es

$$\sigma_{y_0}^2 = \sigma_a^2 + x_0^2\sigma_b^2 + 2x_0\sigma_{ab}$$

con

$$\sigma_{ab} = -\frac{\sum x}{\Delta}\sigma_y^2$$