Sección eficaz y camino libre medio para la interacción de fotones con la materia

7 de febrero de 2014

(Nota: gran parte de este apunte, incluido el grafico, está sacado de aca: `http://en.wikipedia.org/wiki/Mean_free_path`. Simplemente completé unas explicacióñes, y modifiqué la parte final de camino libre medio de una manera que me parece mas intuitiva.)

Vamos a ver como definir a partir de una sección eficaz, la ecuación de atenuación para los rayos gamma. Supongamos que tenemos un blanco de lado L, y espesor dx, como se ve en la figura.

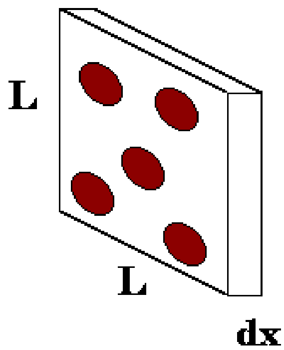

Figura 1

Donde los circulos marrones representan "átomos" por los cuales esta formado el blanco, y el espacio entre ellos los tomamos como vacío. Si incidimos con un flujo de fotones (o partículas neutras) en las siguientes unidades:

$$I \left[\frac{\text{numero de particulas}}{\Delta \text{A } \Delta \text{t}} \right] \tag{1}$$

Podemos pensar lo siguiente: como estamos trabajando en un espesor dx, la probabilidad de que una partícula colisione con alguno de los átomos, suponiendo que el haz cubre TODO el blanco, es simplemente el área efectiva de los átomos en dirección normal al haz, dividido el área total del blanco. El área efectiva de los átomos es lo que conocemos como sección eficaz. En este curso vamos a tomar la sección eficaz de los átomos como un área finita. En cuántica 2 van a ver qué es lo que pasa con las secciónes eficaces con electrones frente al potencial de coulomb, y otros potenciales, que complican bastante las cosas. Por ahora, pensemos como decíamos que la sección eficaz de cada átomo es finita, y la llamamos σ.

Si queremos el área efectiva de todos los átomos, simplemente multiplicamos el número de átomos por unidad de volumen (n), por el volumen total del blanco(L^2 dx), por la sección eficaz de cada átomo(σ.).

Entonces escribimos la probabilidad de que exista una interacción como:

$$\text{Prob(interaccion en un dx)} = \frac{Area(atomos)}{Area(total)} = \frac{nL^2dx\sigma}{L^2} = n\sigma dx \tag{2}$$

Como dijimos que cuando hay una interacción, ese fotón (o partícula neutra) ya no forma parte del haz, podemos escribir el decremento en la intensidad, como la intensidad original por la probabilidad de interacción:

$$dI = -n\sigma I dx \tag{3}$$

De donde, integrando en un espesor finito, sale la ecuación:

$$I = I_0 e^{-n\sigma x} \tag{4}$$

Donde las unidades de $n\sigma$ son $[\frac{1}{\text{longitud}}]$. Esto es lo mismo que vimos en la teoría, solo que con nombre distinto, es decir:

$$n\sigma = \mu \tag{5}$$

Entonces la ecuación queda:

$$I = I_0 e^{-\mu x} \tag{6}$$

Lo último que queda ver es el camino libre medio. Primero pensemos que si pasamos dividiendo I_0, lo que tenemos es una distribución exponencial de "probabilidad de NO interacción". Es decir, que vale uno cuando x=0, y despues va decreciendo.

Si queremos ver la probabilidad de SI interacción, basicamente hacemos uno menos lo anterior, es decir:

$$P(interaccion\ en\ x) = P(x) = 1 - \frac{I}{I_0}e^{-\mu x} \tag{7}$$

Entonces busquemos la densidad de probabilidad, diferenciando:

$$dP(x) = d\left[1 - \frac{I}{I_0}e^{-\mu x}\right] = \mu e^{-\mu x} dx \tag{8}$$

Entonces podemos calcular el valor medio de x, de la manera usual:

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty x.dP(x) = \int_0^\infty x\mu e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu} \tag{9}$$

de donde vemos entonces que el valor medio de x, o camino libre medio λ es:

$$\lambda = \frac{1}{\mu} \tag{10}$$

Con esto terminan las relaciónes que queríamos mostrar entre el camino libre medio, el coeficiente de atenuación, y la sección eficaz atómica.