14-5-2012

Introducción a Partículas y Física Nuclear
Guía 10
1er semestre 2012

75. El operador de rotaciones para un estado de espín j es: $U(\vec{\theta}) = e^{i\vec{\theta}.\vec{j}}$, donde $\vec{j}$ es el impulso angular, generador de rotaciones, y $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \theta\hat{\theta}$. Muestre que el operador de rotaciones para espín $\frac{1}{2}$ ($\vec{j} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$) se puede expresar como: $U(\vec{\theta}) = \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{i}{2}\hat{\theta}.\vec{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}$.

76. Ante una transformación de Lorentz un espinor de Dirac transforma como $\psi \to \psi' = S\psi$, donde S es un operador en el espacio de espinores.
(a) Mostrar que la ecuación de Dirac: $(\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) = 0$, se transforma en $(\partial\!\!\!/' - m)\psi'(x') = 0$, donde $\partial_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu \partial'_\nu$.
(b) Demostrar que la ecuación de Dirac es covariante si: $S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$.

77. **(*)** De manera análoga al grupo de las rotaciones, el operador de transformaciones de Lorentz es: $S(\epsilon) = e^{\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}$, donde $S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}$ son los generadores de boosts y rotaciones, y $\epsilon_{\mu\nu}$ son los parámetros (reales) correspondientes. En el caso de los espinores de Dirac, los generadores $S^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.
(a) Mostrar que para un boost en el eje $\hat{x}$, con $\epsilon_{01} = \phi$, se obtiene: $S(\epsilon_{01}) = \mathbf{1}\cosh\frac{\phi}{2} + \gamma^0\gamma^1\sinh\frac{\phi}{2}$ $(\tanh\phi = v/c)$.
(b) Mostrar en el caso particular del punto anterior que S no es unitaria y que: $S^\dagger\gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$. (Este último resultado vale para cualquier transformación de Lorentz.)
(c) Usando el resultado anterior, ver que: $\bar{\psi}\psi$ es un invariante de Lorentz.
(d) Usando el resultado (77-b), mostrar que la corriente $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ transforma como un cuadrivector.

78. Construir las soluciones tipo onda plana de la ecuación de Dirac mediante la aplicación de un boost sobre los espinores $\Psi(x) = u(0)e^{-imt}$ y $\Psi(x) = v(0)e^{imt}$ correspondientes a una partícula en reposo (puede usar los resultados del ejercicio anterior).

79. Verificar que el lagrangiano de interacción de una partícula de Dirac con el campo electromagnético

$$\mathcal{L}_{QED} = \overline{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) + e\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

es invariante ante una transformación de medida local

$$\begin{cases} \psi(x) \to e^{i\,e\alpha(x)}\psi(x) \\ A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha(x) \end{cases}$$

80. **(*)** Mostrar que un término de masa para el campo A_μ del tipo $m^2 A_\mu A^\mu$ rompe la invariancia de gauge del Lagrangiano de QED.