

# **Estudio de las fuerzas actuantes en la interacción de un disco en rotación con un campo magnético estacionario.**

Sebastián Arroyo, Tomas Riccardi

(Marzo 2011)

*Se estudió el fenómeno de interacción magnética entre un disco metálico en rotación bajo la influencia de un campo magnético estacionario, en la aproximación cuasi-estática. Y se comprobó la validez del modelo teórico en este caso.*

## **Introducción:**

Cuando un material conductor se mueve con una velocidad  $v$  bajo la acción de un campo magnético  $B$ , se inducen corrientes en su interior denominadas 'Corrientes de Foucault'. Estas interactúan a su vez con el campo magnético dando como resultado una fuerza neta sobre el conductor.

Si el conductor es un disco girando con velocidad angular  $\omega$ , bajo un imán cuyo campo magnético  $B$  es uniforme en la región de su proyección sobre el disco, y cero fuera de esta. La fuerza que resulta de la interacción se puede descomponer en una fuerza radial, una tangencial en la dirección contraria al movimiento llamada de arrastre  $F_{arr}$  . y una componente perpendicular al disco cuya reacción sobre el imán llamaremos de levitación,  $F_{lev}$  .

Si el disco es suficientemente grande, comparado con el imán, para considerar que la velocidad en la zona del campo magnético se mueve a la misma velocidad  $v$ , la cual no supera la velocidad crítica  $v_0$  dada por

$$v_0 = \frac{2}{\mu \sigma h} \quad (1)$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad magnética del vacío,  $\sigma$  la conductividad del material disco y  $h$  su espesor, puede considerarse que se trabaja en el límite cuasi-estático.

En estas condiciones, aplicando el método de aproximaciones sucesivas [1] se obtiene que la fuerza de arrastre es

$$F_{arr} = -\frac{1}{2} h \sigma \omega \int_A B^2 R da \quad (2)$$

donde  $R$  es la posición radial del centro del imán y  $A$  su área. Si definimos

$$\beta = \frac{1}{2} h \sigma \int_A B^2 da \quad (3)$$

Queda 
$$F_{arr} = -\beta \omega R \quad (4)$$

esta fuerza ejercerá un torque respecto del eje de rotación del disco dado por

$$\Gamma = R F_{arr} = -\beta \omega R^2 \quad (5)$$

y como el torque es el producto del momento de inercia  $I$  con la aceleración angular  $\alpha$ , se obtiene una relación lineal entre esta y la velocidad angular

$$I \alpha = -\beta \omega R^2 \quad (6)$$

Por otro lado, se ha observado que si un campo magnético se mueve con velocidad constante y paralela a una placa conductora delgada, existe una relación simple entre la fuerza de arrastre magnético y la de levitación dada por

$$F_{lev} = \frac{v}{v_0} F_{arr} \quad (7)$$

siempre y cuando el movimiento se mantenga en el límite cuasi-estático [2]. Si se combina esta con la ecuación (4) se obtiene la siguiente expresión para la fuerza de levitación

$$F_{lev} = -\frac{\beta}{v_0} \omega^2 R^2 \quad (8)$$

Con el objetivo de verificar estas expresiones obtenidas teóricamente es que se realizó el siguiente trabajo experimental, estudiando el comportamiento de las fuerzas de arrastre y levitación en función de la velocidad angular, para distintas posiciones radiales del imán, utilizando para ello una variedad de discos metálicos conductores.

### Método experimental:

Para realizar el experimento se utilizó el dispositivo esquematizado en la Figura (1), el cual consiste en un disco metálico de radio  $R$  espesor  $h$ , montado sobre un eje vertical de tal manera que la velocidad de rotación se pueda controlar variando la tensión que se le aplica al motor que lo hace girar. En la parte superior del disco se suspende un imán de diámetro  $D$ , en el extremo de un dinamómetro sujeto a un soporte móvil, el cual es utilizado para medir la fuerza de levitación.

El disco está sujeto al eje mediante una tuerca hexagonal. La cual se utilizó para medir la frecuencia de rotación del disco, apuntando un láser con el haz paralelo a una de sus caras y suficientemente cerca de esta para que al girar el disco la arista de la tuerca bloquee el haz de luz, evitando que incida sobre un fototransistor colocado al otro lado del disco, ver Figura (2).

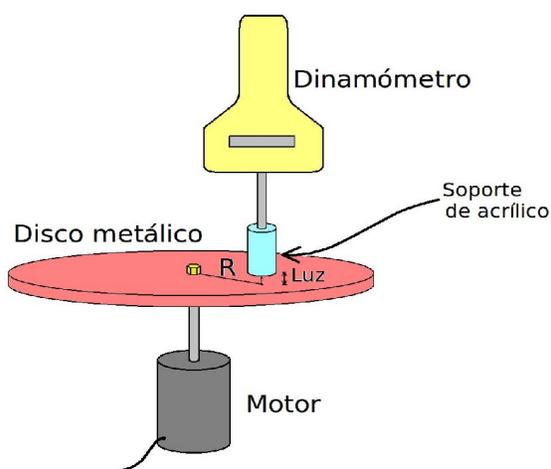


Figura 1: esquema del dispositivo utilizado para realizar el experimento.

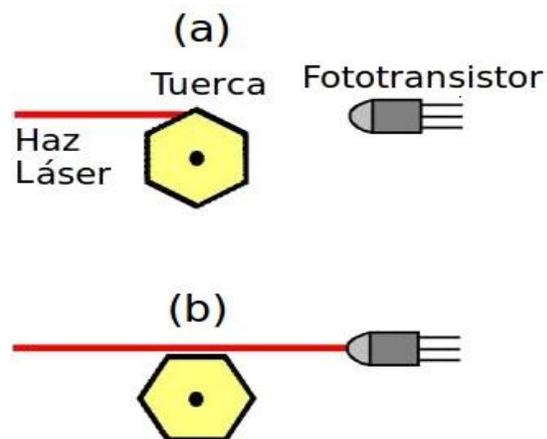


Figura 2: esquema de la configuración del láser con la tuerca y el fototransistor, para obtener la velocidad angular.

La señal intermitente emitida por el fototransistor es enviada a un frecuencímetro. Este fue conectado a una computadora para poder realizar adquisiciones de datos de frecuencia en función del tiempo.

Se trabajó con distintos tipos de discos metálicos cuyas especificaciones se encuentran listadas en la Tabla (1). Para cada uno se tomaron mediciones de la fuerza de levitación variando la velocidad angular, con el imán en tres posiciones radiales diferentes:

$$R_1=(24\pm 0,5)mm, \quad R_2=(39\pm 0,5)mm, \quad R_3=(54\pm 0,5)mm,$$

midiendo la tensión y la corriente aplicadas al motor para cada frecuencia.

Material	Diámetro [mm]	Espesor [mm]	Conductividad eléctrica [ $\Omega^{-1}m^{-1}$ ]
Cobre	140,1±0,1	5,0±0,1	58,8x10 <sup>6</sup>
Bronce	140,1±0,1	5,0±0,1	7x10 <sup>6</sup>
Acero Inoxidable	140,4±0,1	5,0±0,1	-
Ferromagnético	140,2±0,1	5,0±0,1	-

Tabla 1: Especificaciones de los discos utilizados para realizar el experimento.

Luego se conectó la salida del frecuencímetro a la computadora y se tomaron datos de velocidad angular en función del tiempo, con el imán en cada uno de los radios y sin él, partiendo de la velocidad máxima soportada por el motor en cada caso y dejando que se detenga por el solo efecto de las fuerzas actuantes en el sistema (la de roce y la de arrastre magnético).

Por otro lado se realizaron mediciones, con el disco de cobre, de la fuerza de levitación en función de la posición radial del imán, manteniendo constante la velocidad angular.

En todas las mediciones la distancia del imán a la superficie del disco (luz) fue  $d=(0,40\pm 0,02)mm$ , salvo para el disco ferromagnético, en cuyo caso la fuerza de atracción magnética era demasiado fuerte para el rango de medición del dinamómetro y se debió trabajar con una distancia mayor,  $d_f=(1,50\pm 0,02)mm$ .

## Resultados y discusión:

Para poder comparar las mediciones realizadas con el modelo teórico descrito, a partir de la ecuación (1) se calcularon las velocidades críticas en

cada material utilizando  $\mu = 4\pi \times 10^{-7} \text{NA}^{-2}$  Obteniéndose las velocidades críticas tangenciales y angulares que se muestran en la Tabla (2).

Disco	Velocidad Tangencial [ms <sup>-1</sup> ]	Velocidad angular R1 [hz]	Velocidad angular R2 [hz]	Velocidad angular R3 [hz]
Cobre	5,4	225	139	100
Bronce	45,5	1895	1166	842
Inoxidable	-	-	-	-
Ferromagnético	-	-	-	-

Tabla 2: velocidades tangenciales y angulares críticas para cada disco en cada uno de los radios utilizados.

Al graficar las mediciones realizadas de la fuerza de levitación en función de la velocidad angular para cada uno de los radios estudiados, se obtuvieron las curvas de las Figuras (3a) y (3b), para los discos de cobre y bronce respectivamente. En estas se puede observar que la dependencia de dicha fuerza con la frecuencia es cuadrática mientras no se exceda la velocidad crítica, e incluso un poco mas allá, lo que acuerda con el modelo.

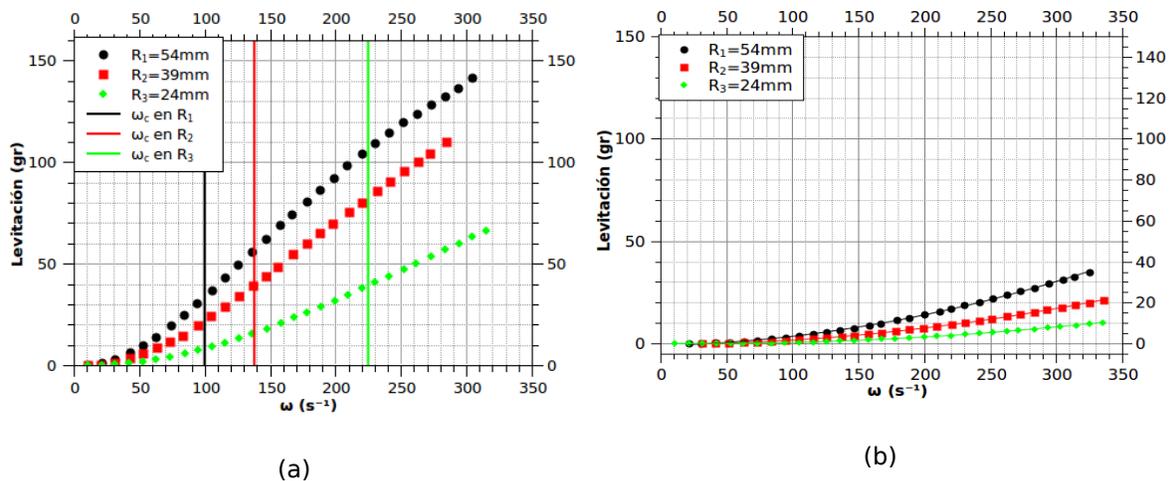


Figura (3): fuerza de levitación en función de la velocidad angular para los discos de cobre (a) y bronce (b).

Al realizar las mismas gráficas para el disco de acero inoxidable y el ferromagnético se vio que la fuerza de levitación es indistinguible en las mediciones. En el caso del disco ferromagnético los datos no muestran tendencia alguna, lo que puede deberse a que la fuerza de atracción magnética que este ejercía sobre el imán variaba para cada punto del disco. En el caso del disco de acero inoxidable los datos son constantes, dentro de su

error, para todas las velocidades angulares. Los gráficos para estos casos se encuentran en el Apéndice [1].

Graficando las mediciones de la fuerza de levitación en función del radio, para una velocidad angular constante realizadas con el disco de cobre, Figura (4), se observa que la fuerza va en aumento hasta que el borde del imán se encuentra a una distancia aproximada de 5mm del borde del disco y luego comienza a decrecer. Esto nos sugiere que es válido suponer un campo magnético constante debajo del imán y nulo fuera de esta región, mientras las mediciones no salgan de este límite.

Los datos de velocidad angular en función del tiempo de frenado adquiridos con la computadora, para el disco de cobre, son los de la Figura (5) (para los otros discos las curvas son similares y sus gráficas se encuentran en el Apéndice [1]). Estas series de puntos  $(\omega_i, t_i)$  fueron tratadas numéricamente para obtener las derivadas de la curva, obteniéndose otras series  $(\alpha_i = d\omega_i/dt, \omega_i)$ .

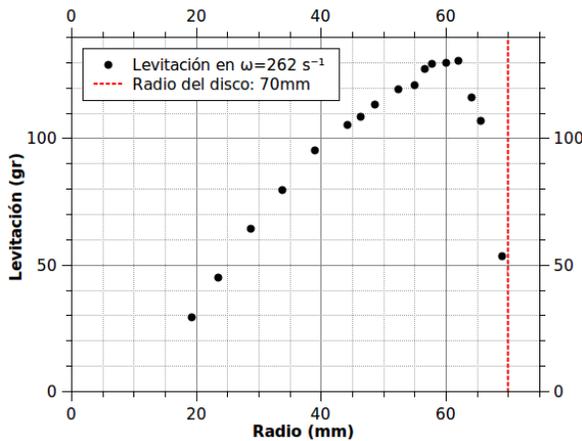


Figura 4: fuerza de levitación en función del radio, con velocidad angular constante. Para el disco de cobre.

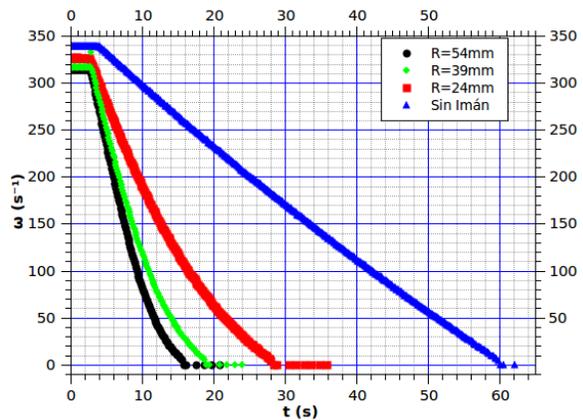


Figura 5: curvas de frenamiento del disco de cobre.

Las curvas obtenidas con estas nuevas series para el disco de cobre y el de bronce, Figuras (6a) y (6b), evidencian que la aceleración angular es lineal con la velocidad angular, como indica la ecuación (6). Siempre y cuando la velocidad no exceda la crítica. Mientras que las del disco de acero inoxidable y el ferromagnético no permiten distinguir ningún efecto proveniente de la interacción con el imán, sus gráficas se encuentran en el Apéndice [1].

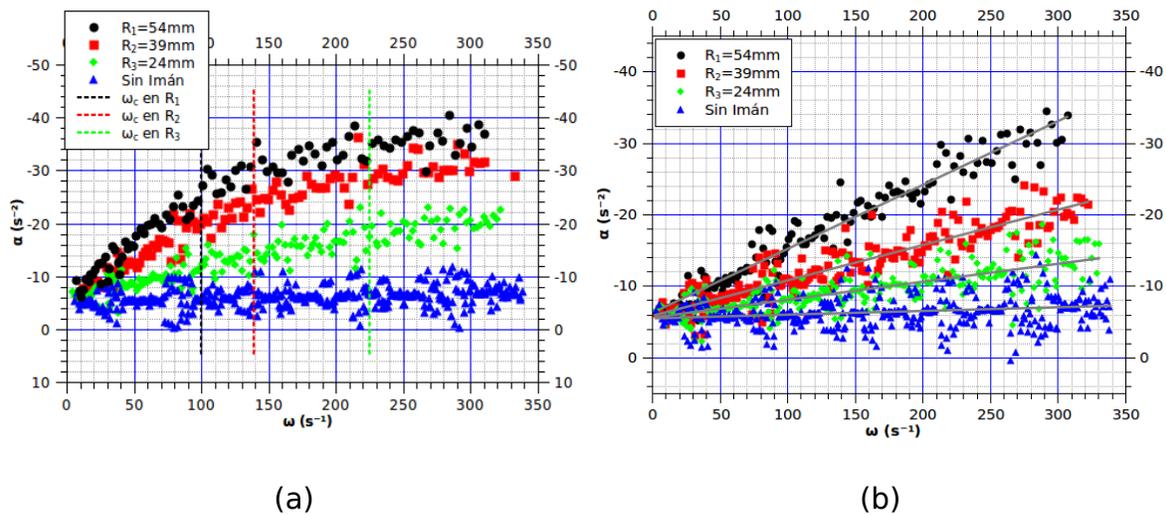


Figura 6: aceleración angular en función de velocidad angular para el disco de cobre (a) y bronce (b).

En todas las gráficas correspondientes al disco de cobre se puede observar que la velocidad crítica es considerablemente pequeña comparada con las velocidades alcanzadas en el experimento. Debido a esto es que para el disco de cobre la curva de aceleración contra velocidad angulares se aparta rápidamente de la linealidad, mientras que para el disco de bronce esto no sucede ya que su velocidad crítica es muy superior a las alcanzadas en el experimento. Algo similar sucede con las curvas de fuerza de levitación contra velocidad angular.

## Conclusiones:

Se realizaron mediciones sobre distintos tipos de discos metálicos girando bajo la acción de un campo magnético. Se confeccionaron gráficos de fuerza de levitación contra velocidad angular para varias distancias del imán al eje del disco. En estos se observó que dicha fuerza depende cuadráticamente de la velocidad angular, mientras se trabaje en el límite cuasi-estático, como predice el método de aproximaciones sucesivas.

También se observó que dicha fuerza depende fuertemente de la conductividad eléctrica del material.

Haciendo un estudio de la fuerza de levitación en función del radio se concluyó que el imán no puede ponerse muy cercano al borde ya que las cargas están confinadas al disco y por lo tanto el modelo para las corrientes inducidas no es válido.

Por otro lado se confeccionaron curvas de aceleración angular versus velocidad angular para cada posición del imán y se comprobó que, en el límite cuasi-estático, esta relación es lineal y depende de la conductividad del material.

El modelo teórico predice también que la velocidad crítica es inversamente proporcional a la conductividad del material por lo que en las curvas correspondientes al disco de cobre se notó que el límite cuasi-estático se sobrepasaba rápidamente.

Finalmente se observó que el método de medición no es apto en el caso del disco ferromagnético ya que la fuerza de atracción magnética saturaba el equipo de medición, impidiendo distinguir cualquier efecto debido al movimiento del disco en presencia de un campo magnético externo.

#### Referencias:

- [1] *Maxwell's theory of Eddy currents in thin conductin sheets, and applications to electromagnetic shielding and MAGLEV*, W. M. Saslow, *Am. J. Phys*: 60, 693-710 (1992).
- [2] *Magnetic drag in the quasi-static limit: A computational method*. M. Marcuso, R. Gass, D. Jones, and C. Rowlett, *Am. J. Phys.* 59, 1118-1121 (1991).

## Apéndice 1:

Gráficos de la fuerza de levitación en función de la velocidad angular para los discos de acero inoxidable (Figura A1a) y ferromagnético (Figura A1b).

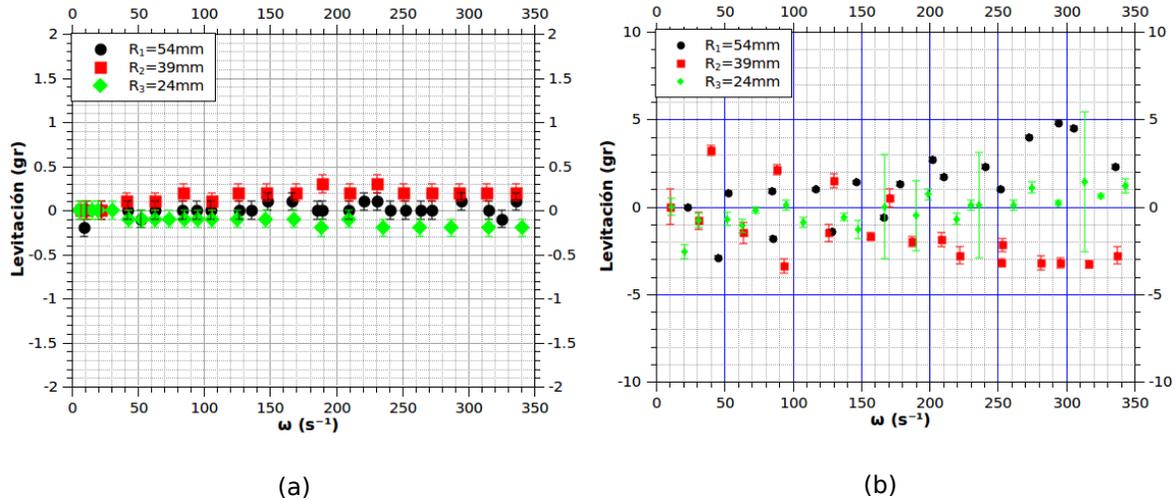
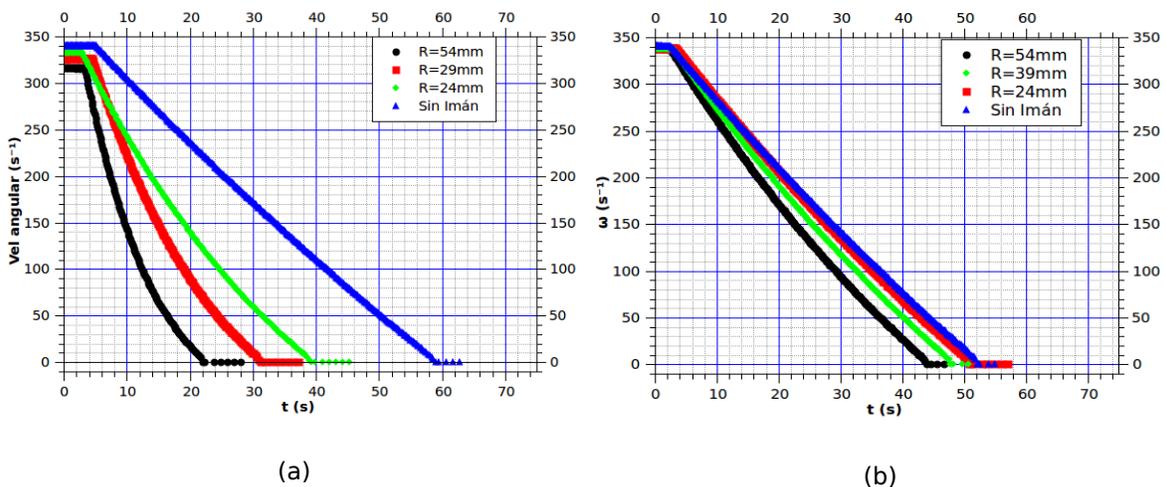
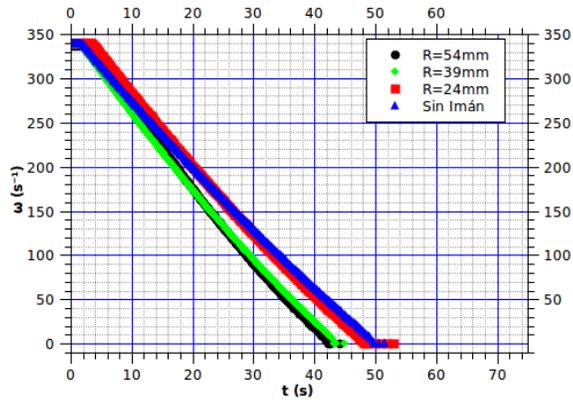


Figura A1: fuerza de levitación versus velocidad angular para el disco de acero inoxidable (a) y ferromagnético (b).

Curvas de frenamiento del disco por acción de la fuerza de roce y la de arrastra magnético para los discos de bronce (Figura A2a), acero inoxidable (Figura A2b) y ferromagnético (Figura A2c):

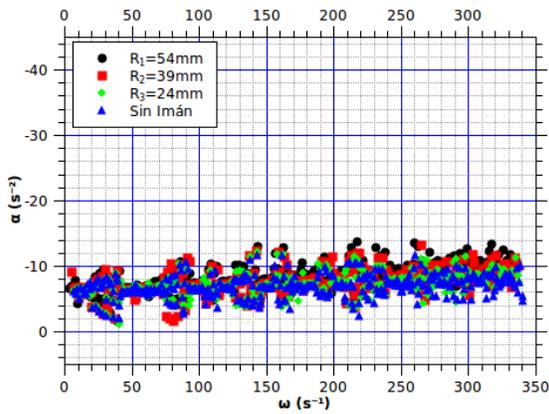




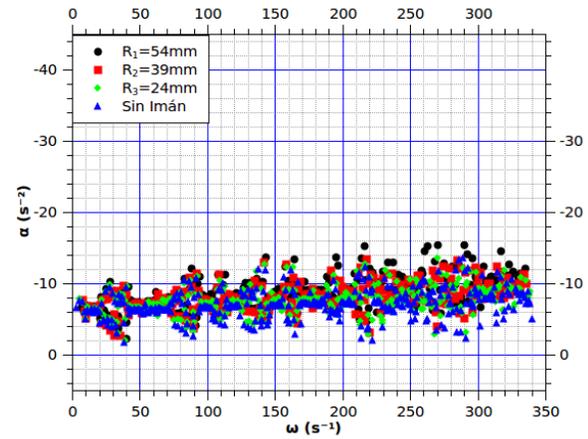
(c)

Figura A2: velocidad angular en función del tiempo para los discos de bronce (a) acero inoxidable (b) y ferromagnético (c). bajo la acción de la fuerza de rozamiento y de arrastre magnético.

Gráficas de aceleración angular versus velocidad angular para los discos de acero inoxidable (Figura A3a) y ferromagnético (Figura A3b):



(a)



(b)

Figura A3: aceleración angular en función de la velocidad angular para cada posición del imán, en el disco de acero inoxidable (a) y ferromagnético (b).