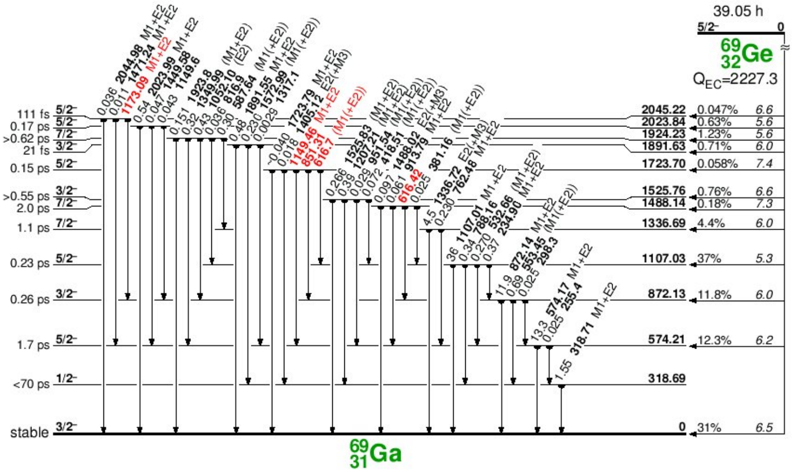
Teoría cuántica del decaimiento γ

5 de marzo de 2014


39.05 h
5/2− 0
69 32 Ge
Q_EC=2227.3
111 fs 5/2− 2045.22 0.047% 6.6
0.17 ps 5/2− 2023.84 0.63% 5.6
>0.62 ps 7/2− 1924.23 1.23% 5.6
21 fs 3/2− 1891.63 0.71% 6.0
0.15 ps 5/2− 1723.70 0.058% 7.4
>0.55 ps 3/2− 1525.76 0.76% 6.6
2.0 ps 7/2− 1488.14 0.18% 7.3
1.1 ps 7/2− 1336.69 4.4% 6.0
0.23 ps 5/2− 1107.03 37% 5.3
0.26 ps 3/2− 872.13 11.8% 6.0
1.7 ps 5/2− 574.21 12.3% 6.2
<70 ps 1/2− 318.69
stable 3/2− 0 31% 6.5
69 31 Ga

Hamiltoniano

Hamiltoniano de una partícula en un campo electromagnético

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\Phi$$

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{q}{m}\vec{p}\cdot\vec{A} + \underbrace{\frac{q^2A^2}{2m}}_{\text{2 fotones}} + q\Phi$$

Hamiltoniano

Hamiltoniano de una partícula en un campo electromagnético

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\Phi$$

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{q}{m}\vec{p} \cdot \vec{A} + q\Phi$$

Hamiltoniano

Hamiltoniano de una partícula en un campo electromagnético

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\Phi$$

$$H = \underbrace{\frac{p^2}{2m} + q\Phi}_{H_0} \underbrace{- \frac{q}{m}\vec{p} \cdot \vec{A}}_{H_{int}}$$

Probabilidad de transición

Teoría de perturbaciones dependientes del tiempo - Regla de Oro de Fermi

$$\lambda_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|H_{int}|i\rangle|^2 \times \underbrace{\frac{dn}{dE}(E_\gamma)}_{\text{Densidad de estados finales}}$$

Probabilidad de transición

Teoría de perturbaciones dependientes del tiempo - Regla de Oro de Fermi

$$\lambda_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | H_{int} | i \rangle \right|^2 \times \underbrace{\frac{dn}{dE}(E_\gamma)}_{\text{Densidad de estados finales}}$$

$$n = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3 r \int d^3 p$$

Probabilidad de transición

Teoría de perturbaciones dependientes del tiempo - Regla de Oro de Fermi

$$\lambda_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\langle f|H_{int}|i\rangle\right|^2 \times \underbrace{\frac{dn}{dE}(E_\gamma)}_{\text{Densidad de estados finales}}$$

$$n = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r \int d^3p$$

$$dn = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p^2 dp d\Omega$$

Probabilidad de transición

Teoría de perturbaciones dependientes del tiempo - Regla de Oro de Fermi

$$\lambda_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|H_{int}|i\rangle|^2 \times \underbrace{\frac{dn}{dE}(E_\gamma)}_{\text{Densidad de estados finales}}$$

$$n = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r \int d^3p$$

$$dn = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p^2 dp d\Omega$$

$$\frac{dn}{dE} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} p^2 \underbrace{\frac{dp}{dE}}_{E=pc \Rightarrow \frac{1}{c}} d\Omega = \frac{V d\Omega}{2\pi^2\hbar^3 c^3} E_\gamma^2$$

Probabilidad de transición

$$H_{int} = \frac{e}{m}\vec{p} \cdot \vec{A}$$

Probabilidad de transición

$$H_{int} = \frac{e}{m}\vec{p} \cdot \vec{A}$$

$$p = -i\hbar\nabla$$

Probabilidad de transición

$$H_{int} = \frac{e}{m}\vec{p} \cdot \vec{A}$$

$$p = -i\hbar\nabla$$

$$\vec{A} = a_0\,\vec{\epsilon}\,cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

Probabilidad de transición

$$H_{int} = \frac{e}{m}\vec{p} \cdot \vec{A}$$

$$p = -i\hbar\nabla$$

$$\vec{A} = a_0\,\vec{\epsilon}\,cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

a_0 sale de normalizar, pidiendo que la energía sea E_γ en el vol. V

$$a_0 = \sqrt{\frac{2\hbar^2}{\varepsilon_o E_\gamma V}}$$

Probabilidad de transición

$$H_{int} = \frac{e}{m}\vec{p} \cdot \vec{A}$$

$$p = -i\hbar\nabla$$

$$\vec{A} = a_0\, \vec{\epsilon}\, cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

a_0 sale de normalizar, pidiendo que la energía sea E_γ en el vol. V

$$a_0 = \sqrt{\frac{2\hbar^2}{\varepsilon_o E_\gamma V}}$$

$$\vec{A} = \sqrt{\frac{2\hbar^2}{\varepsilon_o E_\gamma V}}\, \vec{\epsilon} \left\{ \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p_\gamma} \cdot \vec{r} - E_\gamma t)\right] + \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\vec{p_\gamma} \cdot \vec{r} - E_\gamma t)\right] \right\}$$

Probabilidad de transición

$$\langle f|H_{int}|i\rangle = \int \Psi_f^* \hat{H}_{int} \Psi_i d\vec{r} = -\frac{ie\hbar}{m} \int \Psi_f^* \nabla \Psi_i \cdot \vec{A}\, d\vec{r}$$

Probabilidad de transición

$$\langle f|H_{int}|i\rangle = \int \Psi_f^* \hat{H}_{int} \Psi_i d\vec{r} = -\frac{ie\hbar}{m} \int \Psi_f^* \nabla \Psi_i \cdot \vec{A}\, d\vec{r}$$

Aproximación dipolar eléctrica. E1

$$e^{\pm i/\hbar \vec{p_\gamma} \cdot \vec{r}} \approx 1 \pm i/\hbar \vec{p_\gamma} \cdot \vec{r} + \dots$$

Probabilidad de transición

$$\langle f|H_{int}|i\rangle = \int \Psi_f^* \hat{H}_{int} \Psi_i d\vec{r} = -\frac{ie\hbar}{m} \int \Psi_f^* \nabla \Psi_i \cdot \vec{A}\, d\vec{r}$$

Aproximación dipolar eléctrica. E1

$$e^{\pm i/\hbar \vec{p_\gamma} \cdot \vec{r}} \approx 1$$

Vale cuando $\frac{E_\gamma R}{\hbar c} \ll 1$, con R radio nuclear.
Si $R \approx 5$ F (A=100), como $\hbar c = 197$ MeV F, la condición es válida sólo para γ de pocos MeV.

Probabilidad de transición. E1

$$\begin{aligned}
\langle f|H_{int}|i\rangle &= \left\{-\frac{ie\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_o E_\gamma V}}\vec{\epsilon}\cdot\int \Psi_f^*\nabla\Psi_i d\vec{r}\right\}\times \\
&\left\{\underbrace{\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_f-E_\gamma-E_i)t\right]}_{=0 \text{ para t}\gg 2\pi\hbar/\text{E}_\gamma \text{ oscila rpido}}+\underbrace{\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_f+E_\gamma-E_i)t\right]}_{=1 \text{ cons. de la energa}}\right\}
\end{aligned}$$

Probabilidad de transición. E1

$$
\begin{aligned}
\langle f|H_{int}|i\rangle \quad = \quad & \left\{ -\frac{ie\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_o E_\gamma V}}\,\vec{\epsilon}\cdot\int \Psi_f^* \nabla \Psi_i d\vec{r} \right\} \times \\
& \left\{ \underbrace{\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_f - E_\gamma - E_i)t\right]}_{=0 \text{ para } t \gg 2\pi\hbar/E_\gamma \text{ oscila rpido}} + \underbrace{\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_f + E_\gamma - E_i)t\right]}_{=1 \text{ cons. de la energa}} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\langle f|H_{int}|i\rangle = -\frac{ie\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_o E_\gamma V}}\,\vec{\epsilon}\cdot\int \Psi_f^* \nabla \Psi_i d\vec{r}}
$$

Probabilidad de transición. E1

Demostrado en Cuántica II

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + U$$

$$\begin{cases} H_0\Psi_i = E_i\Psi_i \\ H_0\Psi_f = E_i\Psi_f \end{cases}$$

$$[\vec{r}, H_0] = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla$$

Probabilidad de transición. E1

Demostrado en Cuántica II

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + U$$

$$\begin{cases} H_0 \Psi_i = E_i \Psi_i \\ H_0 \Psi_f = E_i \Psi_f \end{cases}$$

$$[\vec{r}, H_0] = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla$$

$$\int \Psi_f^* \nabla \Psi_i d\vec{r} = \frac{m}{\hbar^2} E_\gamma \int \Psi_f^* \vec{r} \Psi_i d\vec{r}$$

Probabilidad de transición. E1

Demostrado en Cuántica II

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + U$$

$$\begin{cases} H_0 \Psi_i = E_i \Psi_i \\ H_0 \Psi_f = E_i \Psi_f \end{cases}$$

$$[\vec{r}, H_0] = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla$$

$$\int \Psi_f^* \nabla \Psi_i d\vec{r} = \frac{m}{\hbar^2} E_\gamma \underbrace{\langle f | \vec{r} | i \rangle}_{\vec{r}_{fi}}$$

Probabilidad de transición. E1

Empezamos con

$$\lambda_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | H_{int} | i \rangle \right|^2 \frac{dn}{dE}(E_\gamma)$$

Probabilidad de transición. E1

Empezamos con

$$\lambda_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\langle f|H_{int}|i\rangle\right|^2 \frac{dn}{dE}(E_\gamma)$$

Terminamos con

$$\lambda_{if} = \frac{e^2}{8\pi^2\hbar^4 c^3 \varepsilon_0} E_\gamma^3 \left|\vec{\epsilon}\cdot \langle f|\vec{r}|i\rangle\right|^2 d\Omega$$

Vemos que la emisión es direccional.

Probabilidad de transición. E1

Empezamos con

$$\lambda_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\langle f|H_{int}|i\rangle\right|^2 \frac{dn}{dE}(E_\gamma)$$

Terminamos con

$$\lambda_{if} = \frac{e^2}{8\pi^2\hbar^4 c^3 \varepsilon_0} E_\gamma^3 \left|\vec{\epsilon}\cdot\langle f|\vec{r}|i\rangle\right|^2 d\Omega$$

Vemos que la emisión es direccional.
Integrando en todos los ángulos

$$\lambda_{if} = \frac{4}{3}\alpha \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^3 c \left|\langle f|\vec{r}|i\rangle\right|^2$$

α cte. de estructura fina

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137{,}04}$$

Probabilidad de transición. E1

Empezamos con

$$\lambda_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\langle f|H_{int}|i\rangle\right|^2 \frac{dn}{dE}(E_\gamma)$$

Terminamos con

$$\lambda_{if} = \frac{e^2}{8\pi^2\hbar^4 c^3 \varepsilon_0} E_\gamma^3 \left|\vec{\epsilon}\cdot\langle f|\vec{r}|i\rangle\right|^2 d\Omega$$

Vemos que la emisión es direccional.

Para que $\vec{r}_{fi}$ sea $\neq 0$ $|i\rangle$ y $|f\rangle$ deben tener paridades opuestas.

Reglas de selección. E1

Reglas de selección para transiciones dipolares eléctricas

Reglas de selección. E1

Reglas de selección para transiciones dipolares eléctricas

- $|i\rangle$ y $|f\rangle$ deben tener paridades opuestas, $\pi_i \neq \pi_f$

Reglas de selección. E1

Reglas de selección para transiciones dipolares eléctricas

- $|i\rangle$ y $|f\rangle$ deben tener paridades opuestas, $\pi_i \neq \pi_f$
- Del Teorema de Wigner Eckart, los momentos angulares se relacionan por $\vec{J_i} = \vec{J_f} + \vec{1}$. El J del fotón dipolar eléctrico es 1.

Reglas de selección. E1

Reglas de selección para transiciones dipolares eléctricas

- $|i\rangle$ y $|f\rangle$ deben tener paridades opuestas, $\pi_i \neq \pi_f$
- Del Teorema de Wigner Eckart, los momentos angulares se relacionan por $\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{1}$. El J del fotón dipolar eléctrico es 1.

Los J siguen la relación triangular

$$|J_f - 1| \leq J_i \leq J_f + 1$$

No pueden ser $J_i = J_f = 0$ simultáneamente.

Reglas de selección. E1

Reglas de selección para transiciones dipolares eléctricas

- $|i\rangle$ y $|f\rangle$ deben tener paridades opuestas, $\pi_i \neq \pi_f$
- Del Teorema de Wigner Eckart, los momentos angulares se relacionan por $\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{1}$. El J del fotón dipolar eléctrico es 1.

Los J siguen la relación triangular

$$|J_f - 1| \leq J_i \leq J_f + 1$$

No pueden ser $J_i = J_f = 0$ simultáneamente.

$$\boxed{J_i - J_f = -1, 0, 1, \text{ no puede haber transiciones } 0 \Longrightarrow 0}$$

Otros momentos dipolares

$e^{\pm i/\hbar \vec{p_\gamma} \cdot \vec{r}} \approx 1$ E1, dip. eléctrica

Otros momentos dipolares

$$
\begin{aligned}
e^{\pm i/\hbar \vec{p_\gamma}\cdot\vec{r}} \quad \approx \quad & 1 && \text{E1, dip. eléctrica} \\
& \pm\, i/\hbar \vec{p_\gamma} \cdot \vec{r} && \text{M1, dip. magnética} \qquad \text{E2, cuadrup. eléctrica}
\end{aligned}
$$

Otros momentos dipolares

$$
\begin{aligned}
e^{\pm i/\hbar \vec{p_\gamma}\cdot\vec{r}} &\approx 1 && \text{E1, dip. eléctrica} \\
&\pm i/\hbar \vec{p_\gamma}\cdot\vec{r} && \text{M1, dip. magnética} \qquad \text{E2, cuadrup. eléctrica} \\
&- \frac{(\vec{p_\gamma}\cdot\vec{r})^2}{\hbar^2} && \text{M2} \qquad \text{E3}
\end{aligned}
$$

Otros momentos dipolares

$$e^{\pm i/\hbar \vec{p_\gamma}\cdot\vec{r}} \approx 1 \qquad \text{E1, dip. eléctrica}$$

$$\pm\, i/\hbar \vec{p_\gamma}\cdot\vec{r} \qquad \text{M1, dip. magnética} \qquad \text{E2, cuadrup. eléctrica}$$

$$-\frac{(\vec{p_\gamma}\cdot\vec{r})^2}{\hbar^2} \qquad \text{M2} \qquad \text{E3}$$

Para el orden L

$$\langle f|H_{int}(L)|i\rangle = K\int \Psi_f^*\nabla\Psi_i \left(\frac{\pm\vec{p_\gamma}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right)^L d\vec{r} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{magnéticos, ML}\\ \text{eléctricos, EL+1}\end{array}\right.$$

Elelento de matriz de mangitud $(k_\gamma R)^L$.

Si $E_\gamma = 1$ MeV y $R = 5$ F $\Longrightarrow (k_\gamma R)^L = \left(\frac{E_\gamma R}{\hbar c}\right)^L = \left(\frac{1}{40}\right)^L$

Reglas de selección. Eℓ

Reglas de selección. Eℓ

$$\begin{cases} \vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{L}_\gamma \\ \pi_i = \pi_f \pi_\gamma \end{cases}$$

Reglas de selección. Eℓ

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{L_\gamma} \\ \pi_i = \pi_f \pi_\gamma \end{array} \right.$$

Con

$$\pi_\gamma = \left\{ \begin{array}{ll} (-1)^{L_\gamma} & \text{multipolar eléctrico} \\ -(-1)^{L_\gamma} & \text{multipolar magnético} \end{array} \right.$$

Reglas de selección. $E\ell$

$$\begin{cases} \vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{L_\gamma} \\ \pi_i = \pi_f \pi_\gamma \end{cases}$$

Con

$$\pi_\gamma = \begin{cases} (-1)^{L_\gamma} & \text{multipolar eléctrico} \\ -(-1)^{L_\gamma} & \text{multipolar magnético} \end{cases}$$

Relación triangular

$$|J_i - J_f| \leq L_\gamma \leq J_i + J_f$$

$J_i = J_f = 0$, no puede ser pues $L_\gamma \geq 1$. Prohibido $0 \Longrightarrow 0$

Reglas de selección. Eℓ

$$\begin{cases} \vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{L}_\gamma \\ \pi_i = \pi_f \pi_\gamma \end{cases}$$

Con

$$\pi_\gamma = \begin{cases} (-1)^{L_\gamma} & \text{multipolar eléctrico} \\ -(-1)^{L_\gamma} & \text{multipolar magnético} \end{cases}$$

Relación triangular

$$|J_i - J_f| \leq L_\gamma \leq J_i + J_f$$

$J_i = J_f = 0$, no puede ser pues $L_\gamma \geq 1$. Prohibido $0 \Longrightarrow 0$
En general

$$\lambda_\gamma = \lambda_\gamma(E1) + \lambda_\gamma(M1) + \lambda_\gamma(E2) + \lambda_\gamma(M2) + \ldots$$

Hay órdenes que se eliminan por reglas de selección

Reglas de selección. Eℓ

$$\begin{cases} \vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{L_\gamma} \\ \pi_i = \pi_f \pi_\gamma \end{cases}$$

Con

$$\pi_\gamma = \begin{cases} (-1)^{L_\gamma} & \text{multipolar eléctrico} \\ -(-1)^{L_\gamma} & \text{multipolar magnético} \end{cases}$$

Relación triangular

$$|J_i - J_f| \leq L_\gamma \leq J_i + J_f$$

$J_i = J_f = 0$, no puede ser pues $L_\gamma \geq 1$. Prohibido $0 \Longrightarrow 0$
En general

$$\lambda_\gamma = \lambda_\gamma(E1) + \lambda_\gamma(M1) + \lambda_\gamma(E2) + \lambda_\gamma(M2) + \ldots$$

Hay órdenes que se eliminan por reglas de selección

$$\begin{cases} \pi_i = \pi_f & \text{M1, E2, M3, E4} \\ \pi_i \neq \pi_f & \text{E1, M2, E3, M4} \end{cases}$$

Fórmula de Weisskopff

$$\lambda_\gamma(E\ell) = C_{(E\ell)} A^{2\ell/3} E_\gamma^{2\ell+1}$$

Fórmula de Weisskopff

$$\lambda_\gamma(E\ell) = C_{(E\ell)} A^{2\ell/3} E_\gamma^{2\ell+1}$$

$$\lambda_\gamma(M\ell) = C_{(M\ell)} A^{(2\ell-2)/3} E_\gamma^{2\ell+1}$$

Fórmula de Weisskopff

$$\lambda_\gamma(E\ell) = C_{(E\ell)} A^{2\ell/3} E_\gamma^{2\ell+1}$$

$$\lambda_\gamma(M\ell) = C_{(M\ell)} A^{(2\ell-2)/3} E_\gamma^{2\ell+1}$$

ℓ :	1	2	3	4	5
$C_{E\ell}$:	$1.0\,10^{14}$	$7.3\,10^{7}$	34	$1.1\,10^{-5}$	$2.4\,10^{-12}$
$C_{M\ell}$:	$3.1\,10^{13}$	$2.2\,10^{7}$	10	$3.3\,10^{-6}$	$7.4\,10^{-13}$

Fórmula de Weisskopff

$$\lambda_\gamma(E\ell) = C_{(E\ell)} A^{2\ell/3} E_\gamma^{2\ell+1}$$

$$\lambda_\gamma(M\ell) = C_{(M\ell)} A^{(2\ell-2)/3} E_\gamma^{2\ell+1}$$

ℓ :	1	2	3	4	5
$C_{E\ell}$:	$1.0\,10^{14}$	$7.3\,10^{7}$	34	$1.1\,10^{-5}$	$2.4\,10^{-12}$
$C_{M\ell}$:	$3.1\,10^{13}$	$2.2\,10^{7}$	10	$3.3\,10^{-6}$	$7.4\,10^{-13}$

$$\lambda_\gamma(E\ell+1) < \lambda_\gamma(M\ell) < \lambda_\gamma(E\ell)$$

No pueden ocurrir al mismo tiempo Mℓ y Eℓ por paridad

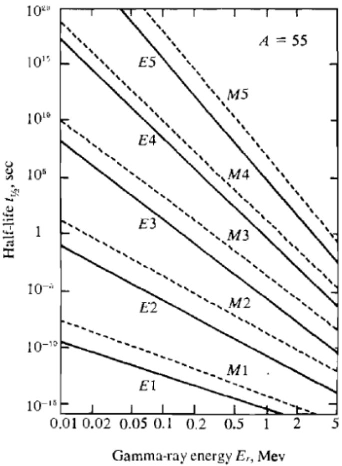
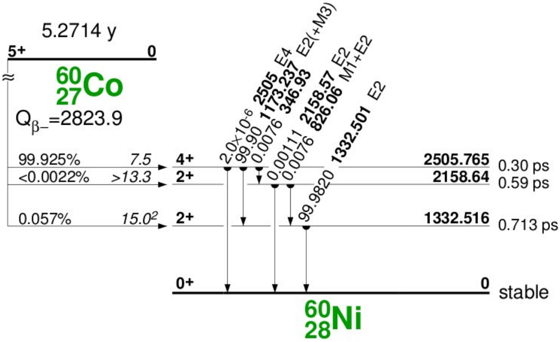
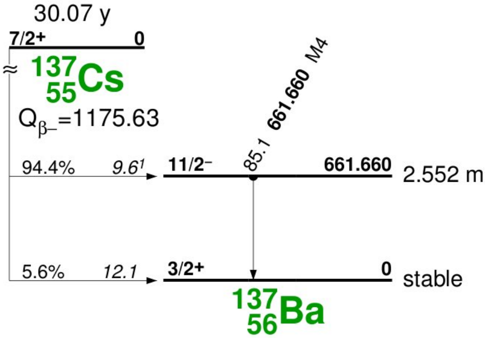


FIGURE 4-6 Half-life for gamma-ray multipole emission according to the Weisskopf estimate (4-64) and (4-65) for a nucleus with $A = 55$. (By permission from A. H. Wapstra, G. J. Nijgh, and R. Van Lieshout, "Nuclear Spectroscopy Tables," North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1959, as adapted by Burcham, 1963.)



5.2714 y
5+
0
60 27 Co
Qβ− =2823.9
99.925% 7.5
<0.0022% >13.3
0.057% 15.0²
4+
2+
2+
0+
2.0×10-6 2505 E4
99.90 1173.237 E2(+M3)
0.0076 346.93
0.00111 2158.57 E2
0.0076 826.06 M1+E2
99.9820 1332.501 E2
2505.765 0.30 ps
2158.64 0.59 ps
1332.516 0.713 ps
0 stable
60 28 Ni


30.07 y
7/2+
0
137
55
Cs
Q β– =1175.63
94.4%
9.6 1
11/2−
85.1
661.660 M4
661.660
2.552 m
5.6%
12.1
3/2+
0
stable
137
56
Ba