

Muestreo de señales

Laboratorio II / Experimental II

Juan Pablo Pascual

juanpablo.pascual@ib.edu.ar

San Carlos de Bariloche, 2025



Instituto
Balseiro

Temario



- ▶ Señales continuas y discretas.
- ▶ Transformada de Fourier.
- ▶ Muestreo
 - ▶ Teorema de muestreo.
 - ▶ Reconstrucción de una señal a partir de sus muestras.
 - ▶ Efecto de submuestreo (*aliasing*).
- ▶ Cuantización.

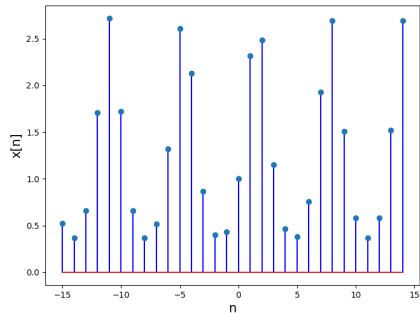
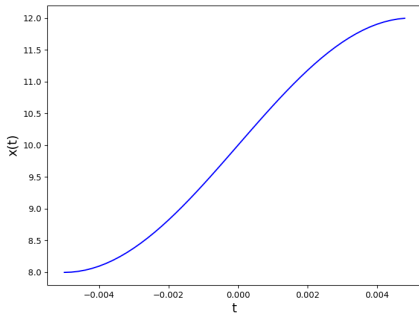


Señales continuas y discretas



Señales continuas y discretas

- Señales continuas, $x(t)$, la variable independiente, t , es continua.
- Señales discretas, $x[n]$ solo están definidas en tiempos discretos, n .





Transformada de Fourier

Señales continuas



Serie de Fourier

Señales continuas periódicas

Sea $x(t)$ una señal periódica de período T ,

$$x(t) = x(t + T) \quad \forall t,$$

entonces $x(t)$ se puede representar como una combinación lineal de exponenciales complejas relacionadas armónicamente, es decir

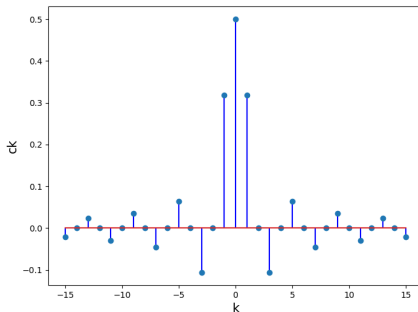
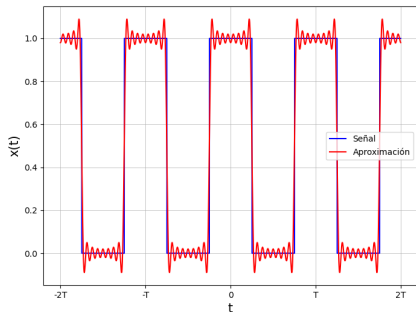
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi k t}{T}}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j \frac{2\pi k t}{T}} dt$$



Serie de Fourier

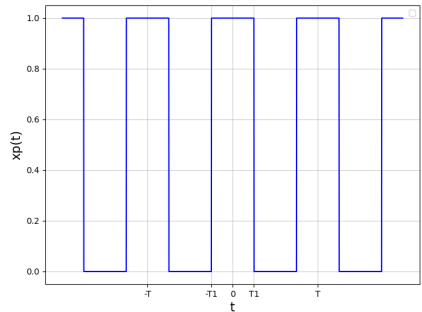
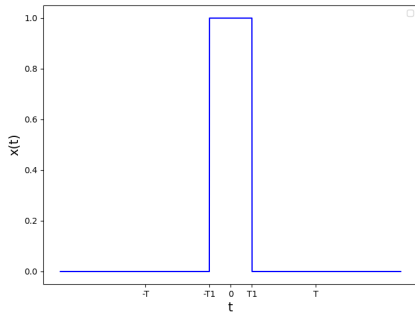
Señales continuas periódicas





Transformada de Fourier

Señales continuas aperiódicas





Transformada de Fourier

Señales continuas aperiódicas

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi k t}{T}}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_p(t) e^{-j \frac{2\pi k t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j \frac{2\pi k t}{T}} dt$$

Definiendo

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j 2\pi f t} dt$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{1}{T} X\left(\frac{k}{T}\right)$$



Transformada de Fourier

Señales continuas aperiódicas

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T}\right) e^{j\frac{2\pi kt}{T}} \frac{1}{T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta f) e^{j2\pi k\Delta f t} \Delta f$$

donde $\Delta f = 1/T$.

Teniendo en cuenta que

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_p(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} x_p(t)$$

entonces

$$x(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta f) e^{j2\pi k\Delta f t} \Delta f = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$



Transformada de Fourier

Señales continuas

Transformada de Fourier

Señales continuas aperiódicas

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Serie de Fourier

Señales continuas periódicas

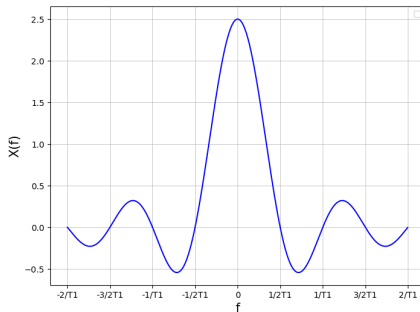
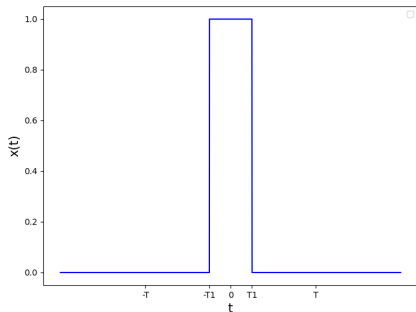
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi kt}{T}}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi kt}{T}} dt$$



Transformada de Fourier

Señales continuas aperiódicas





Transformada de Fourier

Señales discretas



Transformada de Fourier

Señales discretas aperiódicas

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{j2\pi s}) e^{j2\pi sn} ds$$

$$X(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi sn}$$

Notar que $X(e^{j2\pi s})$ es periódica con período 1

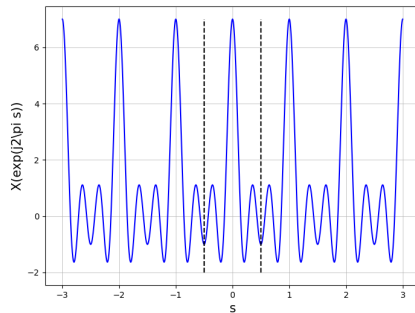
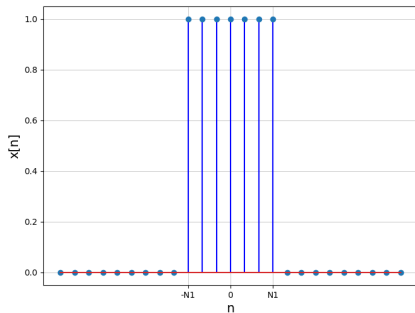
$$X(e^{j2\pi(s+1)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi(s+1)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi sn} e^{-j2\pi n} = X(e^{j2\pi s})$$

teniendo en cuenta que $e^{-j2\pi n} = 1$.



Transformada de Fourier

Señales discretas aperiódicas



$s \rightarrow 0$ baja frecuencia y $s \rightarrow 1/2$ alta frecuencia



Transformada de Fourier

Señales discretas aperiódicas

Transformada Discreta de Fourier (TDF)

Considerando $x[n]$ de duración finita, $0 \leq n \leq N$, entonces

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi k n}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi k n}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

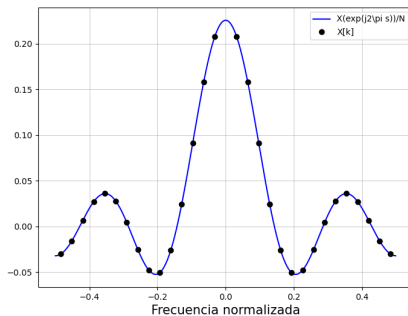
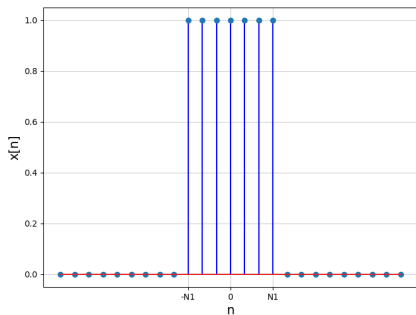
Notar que la TDF y la TFTD guardan la siguiente relación: $X[k] = \frac{1}{N} X(e^{j2\pi k/N})$.

El algoritmo llamado FFT es un algoritmo que evalúa la TDF con un costo computacional muy bajo.



Transformada de Fourier

Señales discretas aperiódicas





Muestreo



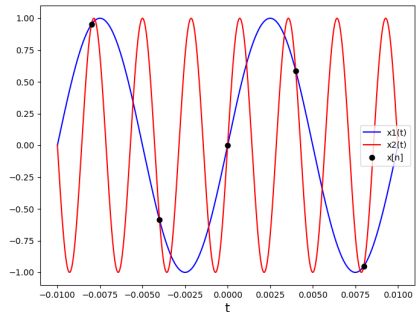
Muestreo

El muestreo es el proceso a partir del cual una señal continua se convierte en una señal discreta.

$$x[n] = x(nT_s)$$

siendo T_s el tiempo o intervalo de muestreo y $f_s = 1/T_s$ la frecuencia de muestreo.

Existe un número infinito de señales que pueden generar un conjunto dado de muestras.



Muestreo



¿Existen condiciones en las que el conjunto de muestras resultantes del muestreo representen de forma unívoca a la señal continua de la que provienen?

¿Es posible reconstruir la señal continua a partir de sus muestras?

¿Cómo se debe elegir T_s o f_s para que esto ocurra?

¿Cómo es la relación entre las transformadas de Fourier de la señales continua y discreta?



Muestreo

Relación entre transformadas de Fourier

Sea $X(e^{j2\pi s})$ la TFTD de $x[n] = x(nT_s)$, con $T_s = 1/f_s$ y $X(f)$ la TF de $x(t)$, entonces

$$X(e^{j2\pi f T_s}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_s)$$

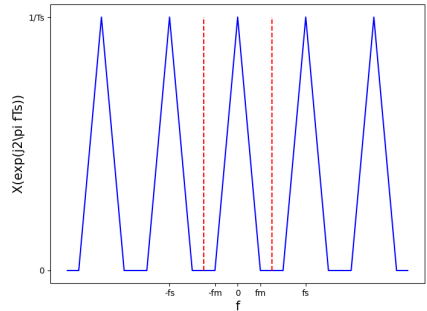
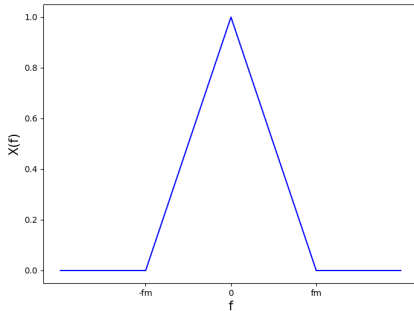
donde $s = fT_s \Rightarrow f = s/T_s$.

$X(e^{j2\pi f T_s})$ es una función periódica que consiste en la superposición de réplicas de $X(f)$ desplazadas y escaladas.



Muestreo

Relación entre transformadas de Fourier

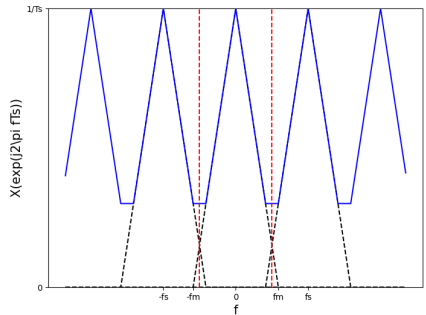
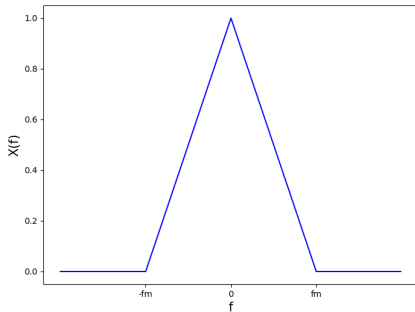


En este caso $f_s > 2f_m$.



Muestreo

Relación entre transformadas de Fourier



En este caso $f_s < 2f_m$.

A este efecto se lo conoce como efecto de submuestreo o *aliasing*.



Muestreo

Teorema de muestreo y reconstrucción

Teorema de muestreo

Sea $x(t)$ una señal de banda limitada, es decir $X(f) = 0$ para $|f| > f_m$.

Entonces, $x(t)$ queda determinada unívocamente a partir de sus muestras $x[n] = x(nT_s)$, si

$$f_s > 2f_m$$

con $f_s = 1/T_s$.

Para señales en las condiciones del teorema de muestreo, existe una fórmula de reconstrucción ideal, mediante la interpolación de las muestras como

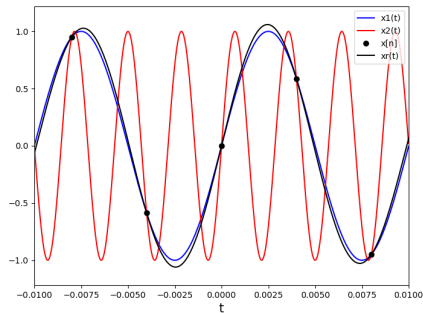
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc} \left(\frac{t - nT_s}{T_s} \right)$$



Muestreo

Ejemplo de reconstrucción

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$





Cuantización