

Física Experimental I - 2011

RECETARIO

1. PROMEDIO E INCERTEZA ESTADÍSTICA

Sea una magnitud física X a medir. Si se miden de forma equivalente N valores X_1, X_2, \dots, X_N , se define el valor medio como

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

la varianza del proceso de medición como

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2$$

y la varianza del valor medio como

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{s_x^2}{N} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2$$

El resultado final de la medición se reporta en la forma: $\bar{X} \pm s_{\bar{x}}$

2. PROPAGACIÓN DE INCERTEZAS ESTADÍSTICAS

Sea F una cantidad a calcular con una fórmula conocida $F = F(X, Y)$. Se miden N pares de valores X_i, Y_i en el laboratorio, de los cuales se obtienen $\bar{X} \pm s_{\bar{x}}$ e $\bar{Y} \pm s_{\bar{y}}$.

2.1. Si las mediciones de X e Y son estadísticamente independientes, entonces el valor de F a reportar es $\bar{F} \pm s_{\bar{F}}$ donde

$$\bar{F} = F(\bar{X}, \bar{Y})$$

$$s_{\bar{F}}^2 = \left[\frac{\partial F}{\partial X}(\bar{X}, \bar{Y}) s_{\bar{x}} \right]^2 + \left[\frac{\partial F}{\partial Y}(\bar{X}, \bar{Y}) s_{\bar{y}} \right]^2$$

2.2. Si las mediciones de X e Y están estadísticamente correlacionadas, entonces el valor medio de F a reportar es igual que en el punto anterior, pero la varianza es

$$s_{\bar{F}}^2 = \left[\frac{\partial F}{\partial X}(\bar{X}, \bar{Y}) s_{\bar{x}} \right]^2 + \left[\frac{\partial F}{\partial Y}(\bar{X}, \bar{Y}) s_{\bar{y}} \right]^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial X}(\bar{X}, \bar{Y}) \frac{\partial F}{\partial Y}(\bar{X}, \bar{Y}) \frac{s_{XY}}{N}$$

donde

$$s_{XY} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

3. REGRESIÓN LINEAL

Se miden N pares de valores x_i , y_i de dos magnitudes que se sabe están relacionadas linealmente de la forma $y = A + Bx$. La incerteza de x debe ser menor que la de y .

3.1. La mejor estimación de los valores de la ordenada al origen y de la pendiente se calculan como

$$A = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{\Delta}$$

$$B = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{\Delta}$$

con sus respectivas varianzas dadas por

$$s_A^2 = s_y^2 \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{\Delta}$$

$$s_B^2 = s_y^2 \frac{N}{\Delta}$$

donde $\Delta = N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2$

$$s_y^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2$$

3.2. Si se quiere calcular un valor interpolado o extrapolado \tilde{y} , para un \tilde{x} dado, en base a los valores obtenidos para A y B , entonces el valor es

$$\tilde{y} = A + B\tilde{x}$$

con la varianza dada por

$$s_{\tilde{y}}^2 = s_A^2 + \tilde{x}^2 s_B^2 + 2\tilde{x} s_{AB}$$

donde $s_{AB} = -s_y^2 \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{\Delta}$

dado que A y B están estadísticamente correlacionados.

Algunos Ejemplos:

1. PROMEDIO E INCERTEZA ESTADÍSTICA

Se midió diez veces una altura h . Los valores son:

h [cm]
12.3
12.4
11.8
12.0
12.4
11.7
12.0
11.6
11.7
12.3

El valor medio es $\bar{h} = 12.02 \text{ cm}$, la incerteza de la variable es $s_h = 0.31198... \text{ cm}$ y la del valor medio es $s_{\bar{h}} = 0.09865... \text{ cm}$. El resultado se reporta $h = (12.0 \pm 0.1) \text{ cm}$

2. PROPAGACIÓN DE INCERTEZAS ESTADÍSTICAS

Se midió diez veces una corriente eléctrica I y una tensión V para calcular una resistencia R . Los valores son:

I [A]	V [V]
2.05	30.75
2.07	31.25
1.97	29.25
2.00	30.00
2.07	31.25
1.95	29.00
2.00	30.00
1.93	29.25
1.95	29.00
2.05	30.75

El valor calculado para la resistencia $R = 14.995 \Omega$. Si se calcula la varianza como si las mediciones de V e I fueran estadísticamente independientes se obtiene $s_R = 0.190... \Omega$ y el valor a reportar es $R = (15.0 \pm 0.2) \Omega$. Sin embargo, puede darse el caso de que las variables sean correlacionadas (por ejemplo lentas fluctuaciones de la fuente de alimentación del circuito), en cuyo caso hay que considerar la covarianza. Si se considera ese término, se obtiene $s_R = 0.0326... \Omega$, con lo que el resultado es $R = (15.00 \pm 0.04) \Omega$.

3. REGRESIÓN LINEAL

Se midieron diez valores distintos de la corriente eléctrica I y sus respectivas tensiones V para calcular una resistencia R . Los valores son:

I [A]	V [V]
1.00	14.9
1.50	22.5
2.00	30.2
2.50	37.3
3.00	45.0
3.50	52.9
4.00	59.6
4.50	67.5
5.00	75.5
5.50	82.0

Se ajustó la regresión lineal $V = A + R I$, resultando

$$A = 0.041212... \text{ V con } s_A = 0.263... \text{ V}$$

$$R = 14.984242... \Omega \text{ con } s_R = 0.0740... \Omega$$

$$s_y = 0.3361... \text{ V}$$

El resultado se reporta como

$$A = (0.0 \pm 0.3) \text{ V} \text{ o sea que las incertezas sistemáticas son pequeñas}$$

$$\text{y } R = (14.98 \pm 0.08) \Omega$$

- Algunos ejemplos de valores interpolados o extrapolados de tensión y sus errores que se calculan con las fórmulas son

I [A]	V [V]
2.9	43.5 ± 0.1
7.0	104.9 ± 0.3
15.0	224.8 ± 0.9