Bibliografía

• Introduction to the theory of error, Y. Beers
• An introduction to error analysis (The study of uncertainties in physical measurements), J. Taylor
• Mecánica elemental, J. Roederer
• Teoría de errores en mediciones, F. Cernuschi

Incertezas en una medición

Más allá del hecho de que el “medir” altera el objeto en cuestión,
no es posible obtener el valor real de una magnitud

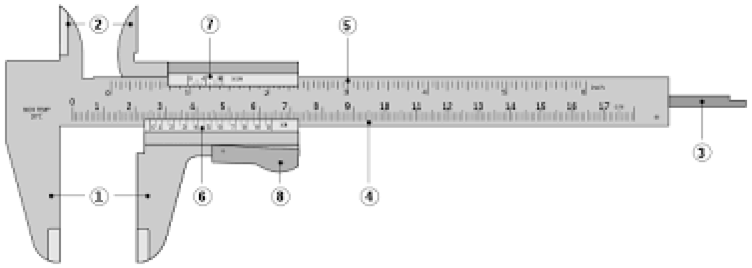
Qué significa medir?

Errores propios del instrumento y
metodología de la medición

Incertezas

todas las mediciones tienen algún grado de duda

modificando la técnica de medición, adecuando el entorno o cambiando instrumentos podremos disminuir los errores….. Pero NO eliminarlos totalmente



Cada caso tiene una necesidad de determinación dada

Incertezas en una medición

Estadísticos o al azar

- al observar un valor en una escala
- al no estar correctamente definido lo que se quiere medir (límites)
- fluctuaciones de las condiciones de contorno (tensión, temperatura, presión, etc.)

Sistemáticos

- de calibración de los instrumentos
- de quien realiza la medición (humano o máquina)
- condiciones de medición diferentes a la de calibración
- selección equivocada del método de medición (suposiciones equivocadas o suposiciones correctas que no se cumplen

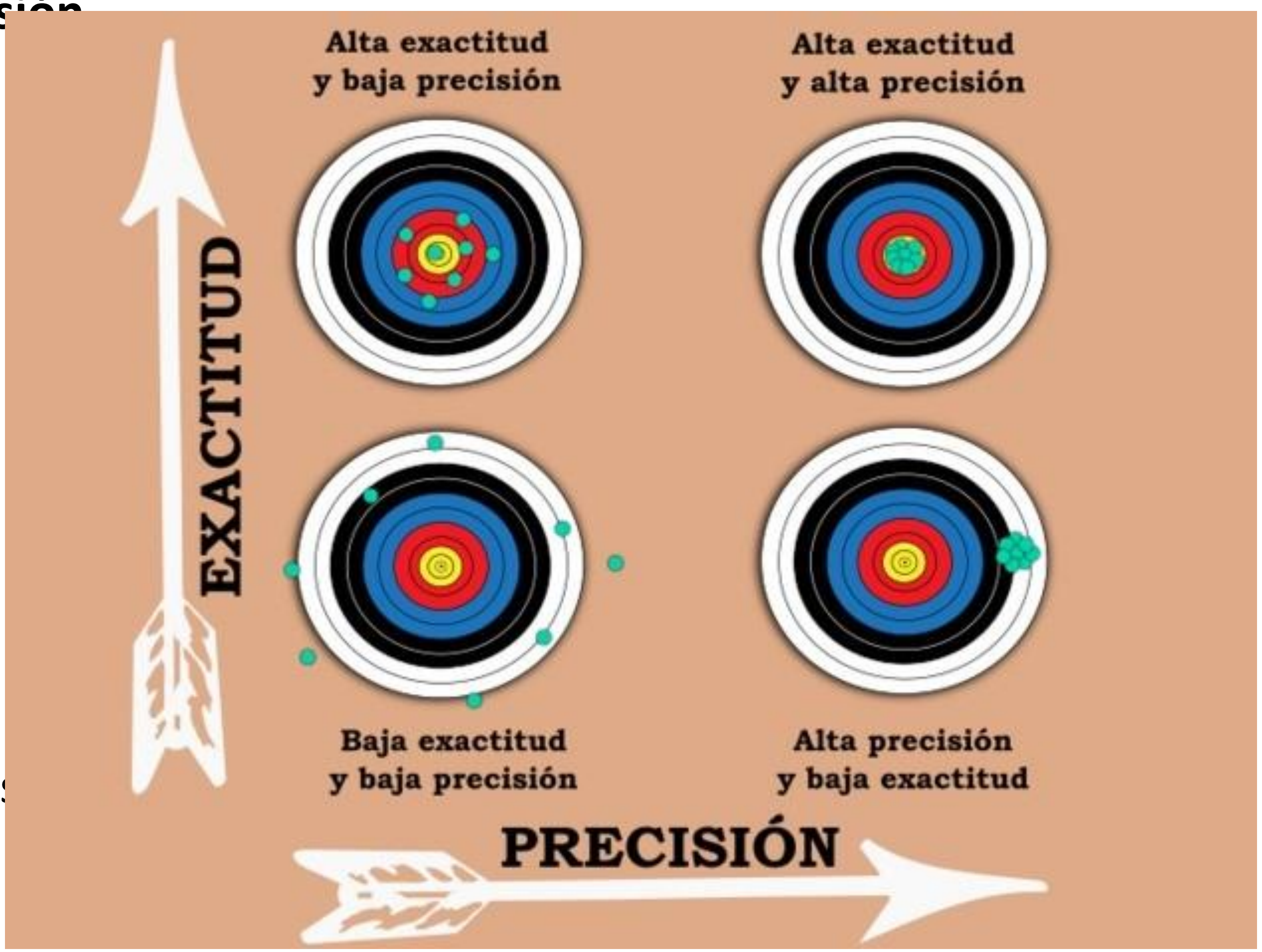
Incertezas en una medición **Exactitud y precisión**

Exactitud

Entre más cerca se encuentra una medición del valor
error y más exacta es.

Precisión

Las mediciones son más precisión cuando los valores
mediciones están lo más cercanas posible.



Errores sistemáticos: puedo eliminarlos?

- Encontrarlos y eliminarlos
- Minimizarlos por calibración
- Estimar su valor

El conocimiento de la medición que hacemos o el fabricante del instrumento que estamos utilizando nos dan información sobre la confiabilidad del mismo. Por ejemplo: 1% sobre el valor medido.

Suponemos que cada medición realizada con dicho instrumento tendrá al menos la incerteza que nos avisa el fabricante.

Errores casuales - estadísticos: cómo puedo mejorar una medición?

- Se producen por efectos externos que cambian constantemente
- Suponemos que no tienen un "sentido" preferencial, sino que afectarán el proceso de medición modificando aleatoriamente su magnitud alrededor del valor "verdadero de medición"
- Entendamos como valor "verdadero de medición" aquel que mediríamos con un instrumento en caso que no existieran efectos externos aleatorios
- El análisis de los errores casuales no nos conduce necesariamente al valor "verdadero absoluto" sino al valor "verdadero de medición".

Cómo se reporta una medición con su error

Indicando un rango: L = (2.2 -2.6) m

Indicando un valor de referencia) y una banda alrededor: L = (2.4 ± 0.2) m

Indicando el error relativo: $Y = y \pm \delta y$

$$\frac{\delta y}{y} = 0.1$$ Error relativo del 10%

Cómo se reporta una medición con su error

Reglas para la escritura de un valor con su error: cifras significativas

$$Z = Z_{\text{más probable}} \pm \delta z$$

utilizaremos **1 cifra** significativa para los errores que obtendremos en este curso, redondeando al número mayor inmediato. Sólo cuando esa cifra empieza con 1 y la segunda es un 1 o 2, sería aceptable colocar una segunda. O sea, 1.1 y 1.2 quedan como están y 1.3 pasa a 2.

El valor de la magnitud medida/calculada se reportará teniendo en cuenta que su última cifra significativa es del mismo orden de magnitud que el error de esta magnitud.

En un proceso donde x.xxxx se obtiene de cálculos, se utilizarán las cifras disponibles para los pasos intermedios y se redondeará al momento de la escritura del resultado

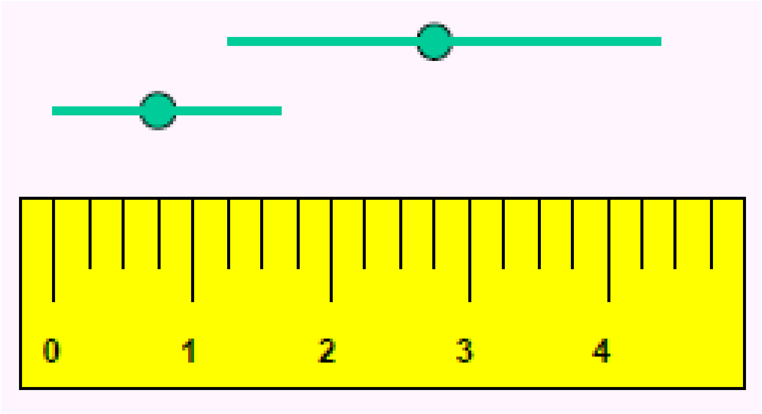
Cómo se reporta una medición con su error

Reglas para la escritura de un valor con su error: cifras significativas

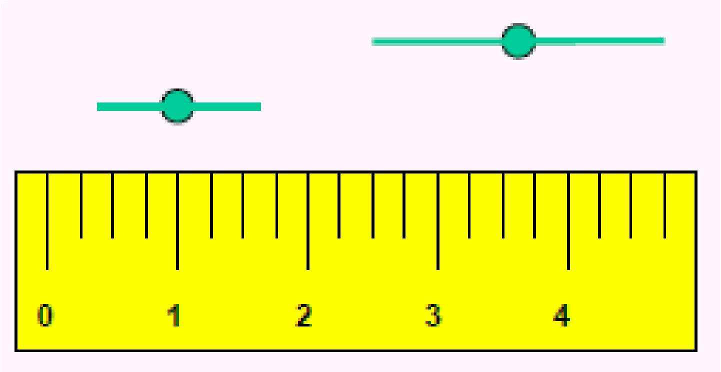
Ejemplos

Z medido//calculado	δz	Z informado
7654.78	28.91	7650 ± 30 $(7.65 \pm 0.03) \times 10^3$
3284.128	0.0445	3284.13 ± 0.05 $(3.28413 \pm 0.00005) \times 10^3$ $(328413 \pm 5) \times 10^{-2}$
4.19875	0.12	4.20 ± 0.12 **4.2 ± 0.2 ???**

Entonces, cuándo son compatibles medidas sucesivas….

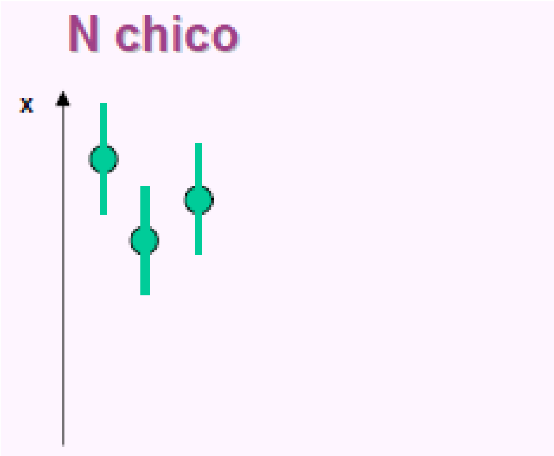


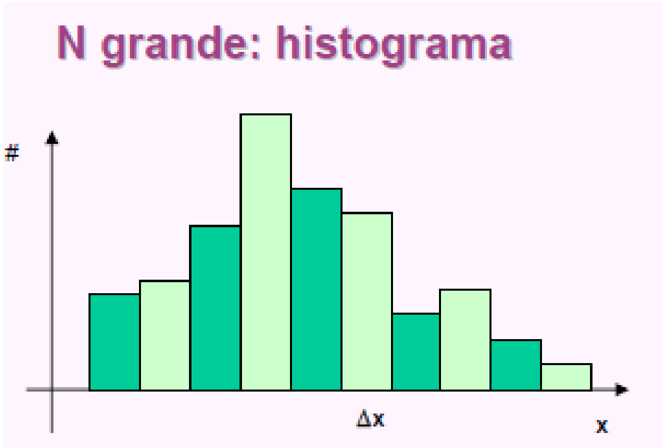
Mediciones compatibles

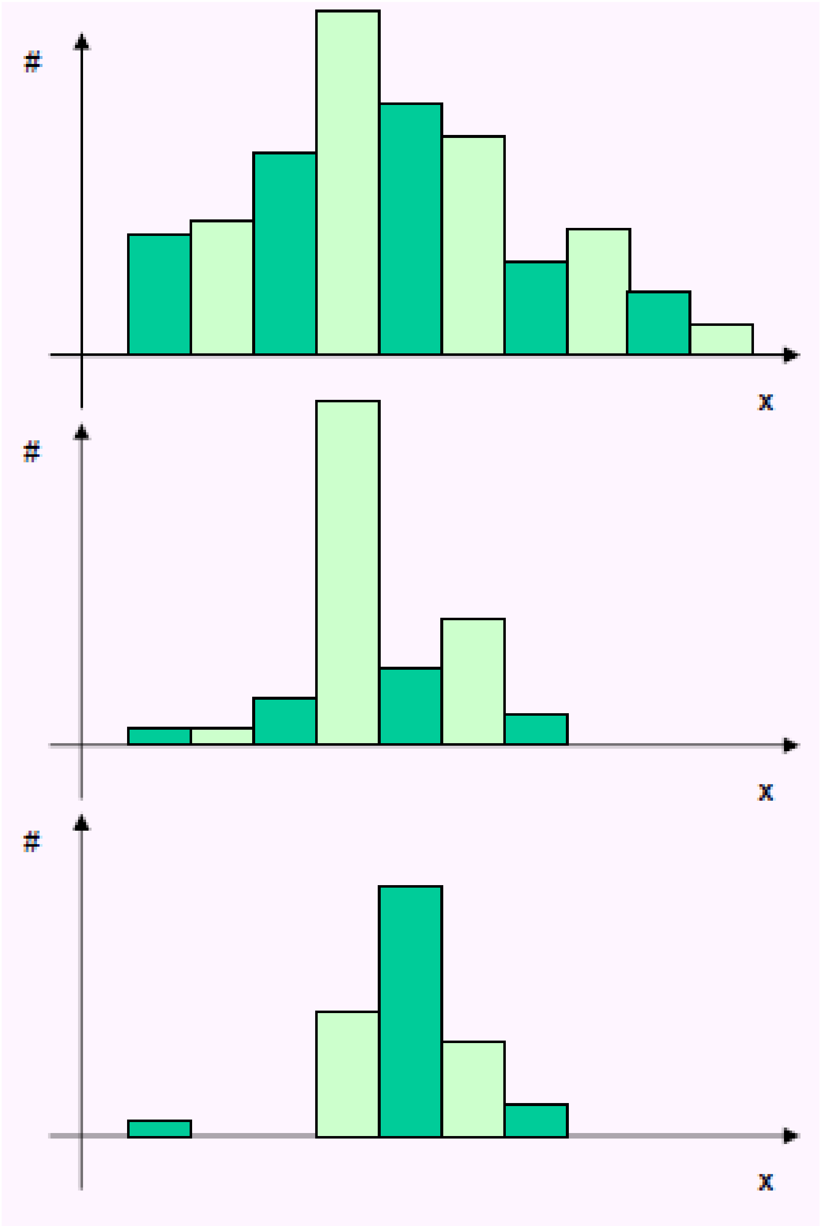


Tenemos problemas

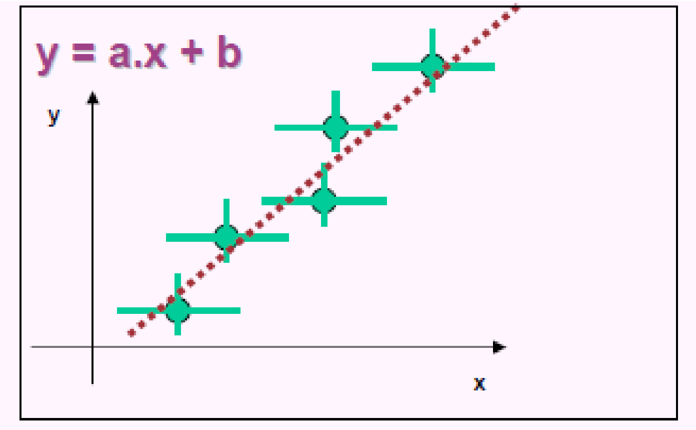
Grafiquemos datos medidos de una misma magnitud donde podamos ver cuán confiables son

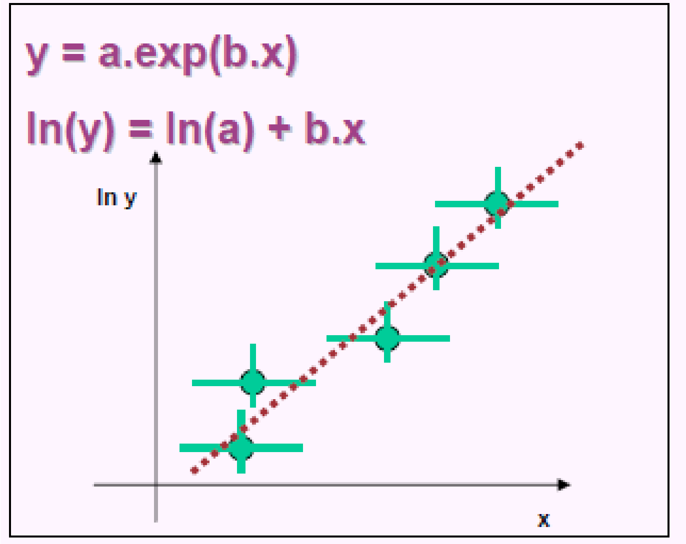


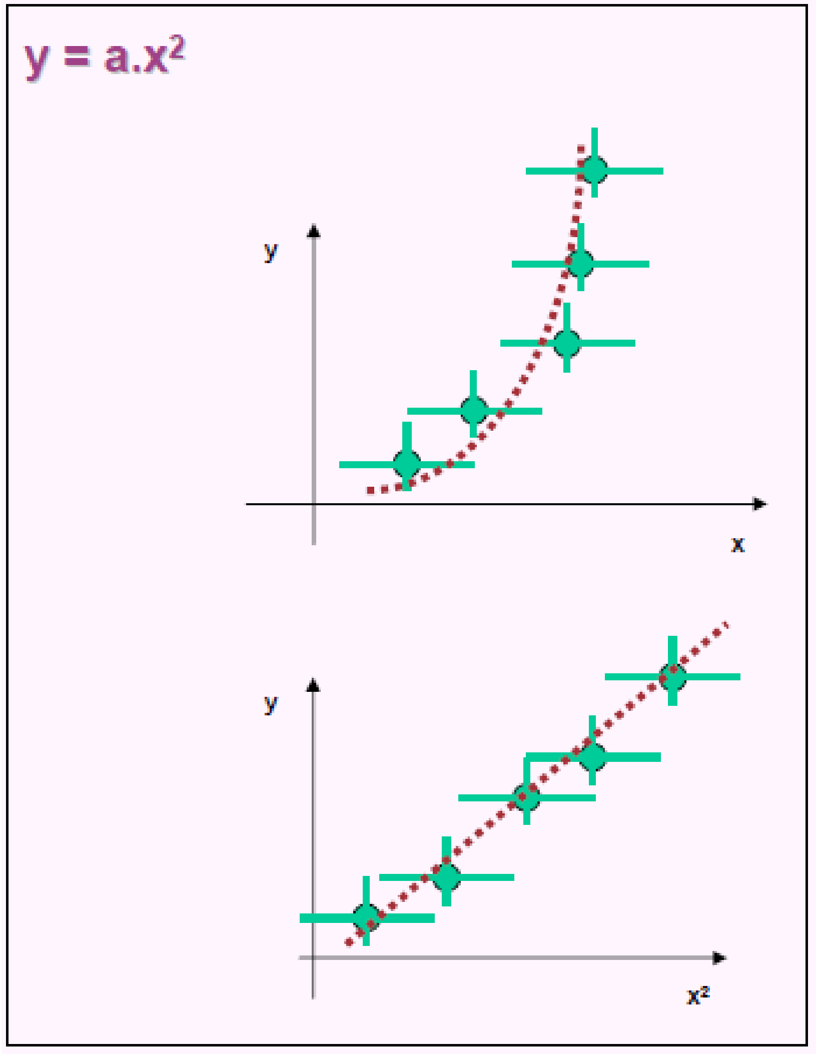




Grafiquemos datos medidos (x,y) relacionados por una expresión f(x,y)

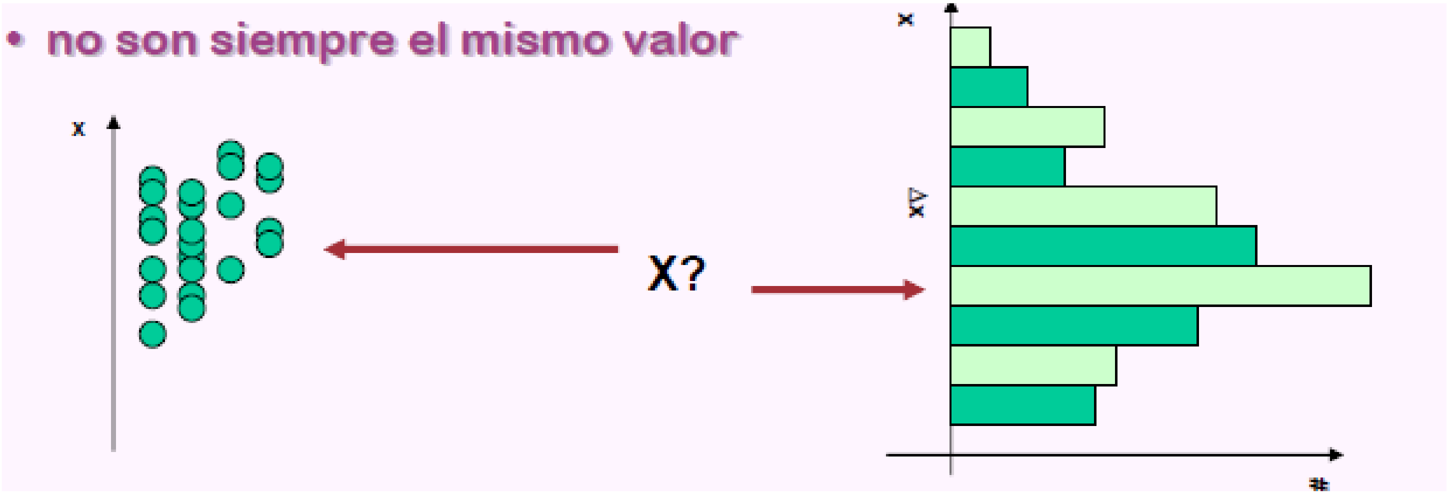






Volvamos a los errores estadísticos: cómo se evidencian?

Se realizan n mediciones (x_1, x_2,…,x_n) de una misma variable x_i



El valor que asignemos a X será el valor "más probable"

Criterio para definir qué valor X reportaremos como resultado:

Sea X el valor que elegimos reportar, entonces $\delta x_i = X\text{-}x_i$

Lo lógico de pensar es que la suma de estas diferencias sea mínima:

$minimo \sum |\delta x_i| = \sum |x_i - X|$ O mejor aun: $minimo \sum (\delta x_i)^2 | = \sum (x_i - X)^2$

Cuál es el mejor valor de X?

Si no hubiesen errores sistemáticos (o son << que los casuales), el X que minimice las diferencias se acercará más al “valor verdadero”

$$minimo\ \sum(\delta x_i)^2 \Big| = \sum(x_i - X)^2 \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial X}\sum(x_i - X)^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\sum(x_i - X)^2 = -2\sum(x_i - X) = -2\sum x_i + 2\sum X = -2\sum x_i + 2nX = 0$$

$$nX = \sum_{1}^{n} x_i \quad \longrightarrow \quad X = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i$$

Errores casuales:

Varianza

α

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(\delta x_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i - X)^2 \quad = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\left(\delta x_i^2 - 2x_iX + X^2\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{1}^{n} x_i^2 - 2X\sum_{1}^{n} x_i + nX^2\right) \quad = \frac{1}{n}\left(\sum_{1}^{n} x_i^2 - nX^2\right)$$

Si reemplazo X por $\overline{x}$

La ventaja de esta expresión es que cada vez que se agregue una medición, sólo se agrega un sumando más. Caso contrario hay que recalcular el promedio y hacer todas las diferencias nuevamente

Desvío estándar

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - nX^2\right)}$$

Ahora cómo se reporta una medición con su error

Cuando realicemos una medición xi, esperaremos observar una fluctuación media de magnitud σ alrededor de su valor “de medición” X

Ahora cómo se reporta una medición con su error: $x_i \pm \sigma$

Este valor de sigma es el error estadístico del método de medición. Cada medición independiente tiene este error.

Si tomamos muchos valores de x_i y hacemos el promedio, el error del promedio no es este sigma, seguramente el error del promedio será menor…. Lo veremos más adelante.

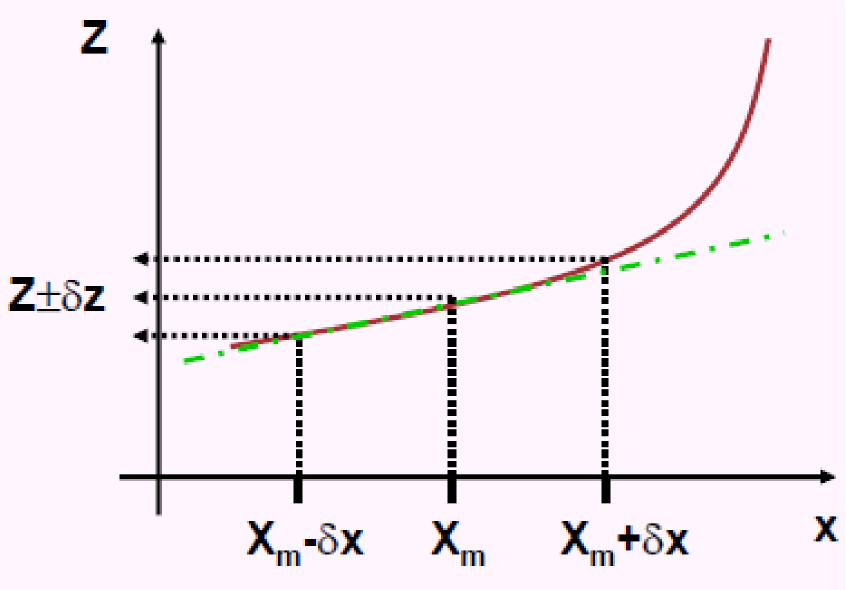
Propagación de errores

Sea Z = Z(x)

Pregunta: si x = $x_m \pm \delta x$ cómo expresamos Z?

Opción 1: calculamos Z en todo el rango (x_m-δx, x_m+δx) y determinamos δz

Opción 2: aproximamos suponiendo que δx es pequeño



Z = Z(x_m)

$$\delta Z = \left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{x_m} \delta x$$

Propagación de errores: más variables

Sea Z = Z(w,x,y)

Pregunta: si $w = w_m \pm \delta w$, $x = x_m \pm \delta x$, $y = y_m \pm \delta y$ cómo expresamos Z?

Opción 1: calculamos Z en todo el volumen alrededor de (w_m,x_m,y_m) de lados $(\delta w,\delta x,\delta y)$ y determinamos δz

Opción 2: aproximamos suponiendo que $\delta w,\delta x,\delta y$ son pequeños y que (w,x,y) son independientes (la ocurrencia de los errores NO está correlacionada).

$Z = Z(w_m x_m y_m)$

Proponemos:

$$\delta Z = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial w}\right]_{w_m} \delta \mathrm{w}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right]_{x_m} \delta x\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right]_{y_m} \delta \mathrm{y}\right)^2}$$

Propagación de errores: más variables - Justificación

Sea $Z = Z(x,y)$ Medimos: $(x_i,y_i) \longrightarrow z_i = Z(x_i,y_i)$

$$\begin{array}{ccc} (x_i,y_i) & & z_i = Z(x_i,y_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X,Y) & \longrightarrow & Z = Z(X,Y) \quad = \quad \text{promedio de } z_i \end{array}$$

Recordemos: $\delta x_i = x_i - X$, $\delta y_i = y_i - Y$ equivalentemente: $\delta z_i = z_i - Z$

Hagamos un desarrollo de Taylor de $Z(x_i,y_i)$

$$z_i = Z(x_i,y_i) = Z(X,Y) + \left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} \delta x_i + \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \delta y_i \quad + \ldots$$

$$\delta z_i = z_i - Z(X,Y) = \left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} \delta x_i + \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \delta y_i$$

Ahora, calculemos σ_z^2 y para ello supongamos (x,y) independientes

$$\delta z_i = z_i - Z(X,Y) = \left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} \delta x_i + \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \delta y_i$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (\delta z_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} \delta x_i + \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \delta y_i\right)^2 =$$

$$\frac{1}{n}\sum_1^n \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} \delta x_i\right)^2 + \frac{1}{n}\sum_1^n \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \delta y_i\right)^2 + \frac{2}{n}\sum_1^n \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \delta x_i \delta y_i\right) =$$

Esta suma es ~ cero porque x_i e y_i son independientes y siempre hay un producto $x_k y_k = -x_i y_i$

$$\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y}\right)^2 \frac{1}{n}\sum_1^n (\delta x_i)^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y}\right)^2 \frac{1}{n}\sum_1^n (\delta y_i)^2 + \left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \frac{2}{n}\sum_1^n \cancel{(\delta x_i \delta y_i)} =$$

$$\sigma_z^2 = \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y}\right)^2 \sigma_y^2$$

$$\boxed{\sigma_z = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y}\right)^2 \sigma_y^2}}$$

Propagación de errores: casos especiales muy usuales

?

Suma de 2 variables: $Z = x \pm y$; $Z = (x_m \pm y_m) \pm [\delta x + \delta y]$

$$Z = x_m \pm y_m$$

$$\delta z = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{x_m y_m}\right)^2 (\delta x)^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{x_m y_m}\right)^2 (\delta y)^2}$$

$$\delta z = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \leq \delta x + \delta y$$

Producto y potencias:

$$Z = (x_m)^a . (y_m)^b$$

$$\frac{\delta Z}{Z} = \sqrt{\left(a \frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(b \frac{\delta y}{y}\right)^2} \leq \lfloor a \rfloor \left[\frac{\delta x}{x}\right] + \lfloor b \rfloor \left(\frac{\delta y}{y}\right)$$

importante para tener en cuenta
cuál factor induce mayor error

Propagación de errores: error del promedio

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \longleftarrow \sigma \qquad\qquad \sigma_{\overline{x}} = ?$$

error del promedio: cada medición x_i es independiente

$$\delta X = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial X}{\partial x_i}\right|_{X_i} \delta x_i\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\delta x_i\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(\delta x_i)^2}_{\sigma_x^2}} = \sqrt{\frac{1}{n^2}\, n\, \sigma_x^2}$$

$$\boxed{\delta X = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$$

Veamos nuevamente la definición de varianza…..

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i - \alpha)^2$$

Donde α es el valor “real” que no podemos conocer…

Y usamos el valor promedio para estimarlo…

$$n\sigma^2 = \sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x} + \bar{x} - \alpha)^2$$

$$n\sigma^2 = \sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \underline{\sum_{1}^{n}(\bar{x} - \alpha)^2} + 2\sum_{1}^{n}\cancel{(x_i - \bar{x})}(\bar{x} - \alpha)$$

es la varianza del promedio: $n\,\dfrac{\sigma^2}{n}$

$$n\sigma^2 = \sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \sigma^2 \longrightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Varianza “real” (respecto al valor “real”
desconocido) usando el valor promedio

Promedios ponderados

Qué pasa si mido una misma magnitud, pero cada medición tiene un error de determinación diferente (distintos instrumentos, distintos días, etc…)

Cada valor tiene un peso diferente, entonces el promedio queda expresado como:

$$\overline{X}_{pond} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n P_i} \sum_{i=1}^n P_i\, x_i \qquad\qquad \sigma^2_{pond} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n P_i} P_i \sigma_i\right)^2 = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n P_i}\right)^2 \sum_{i=1}^n P_i^2 \sigma_i^2$$

Busquemos los pesos que nos minimice la varianza

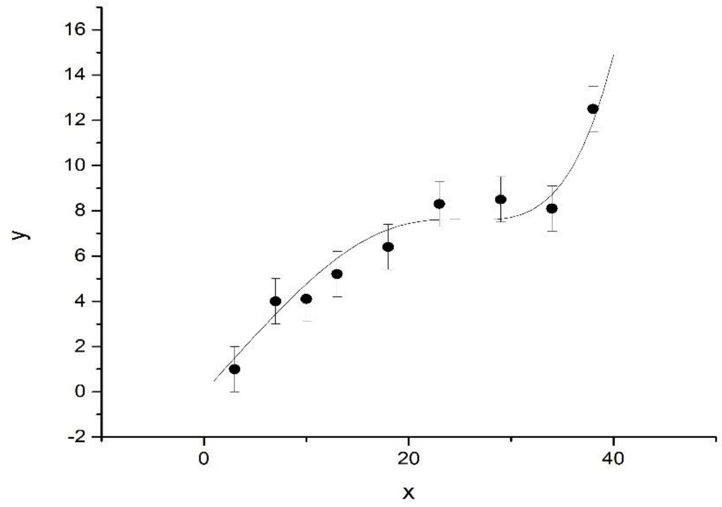
$\forall i$

$$\frac{\partial \sigma^2_{pond}}{\partial P_i} = \left[\cancel{2}\, P_i \sigma_i^2 \overbrace{\left(\sum_{i=1}^n P_i^2\right)}^{\alpha}{}^{\cancel{2}} - \cancel{2}\overbrace{\sum_{i=1}^n P_i^2 \sigma_i^2}^{\beta} \cdot \cancel{\sum_{i=1}^n P_i^2}\right] \cdot \cancel{\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n P_i}\right)^4} = 0$$

$$P_i \sigma_i^2\, \alpha = \beta \qquad P_i = \frac{cte}{\sigma_i^2} \longrightarrow P_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \qquad \sigma^2_{pond} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Ajustes de resultados:

Medimos n pares (x_i,y_i) que se puede describir como una función $y_i = f(x_i,a,b,c,\ldots)$, donde a,b,c,… son los prarámetros de esta función



Queremos buscar los parámetros a,b,c,… que “ajuste” **lo mejor posible** la expresión $y = f(x,a,b,c,\ldots)$, para todos los pares (x_i,y_i) medidos.

Suposiciones:

- el error en *x* es mucho menor que el de *y*
- los errores en y son similares

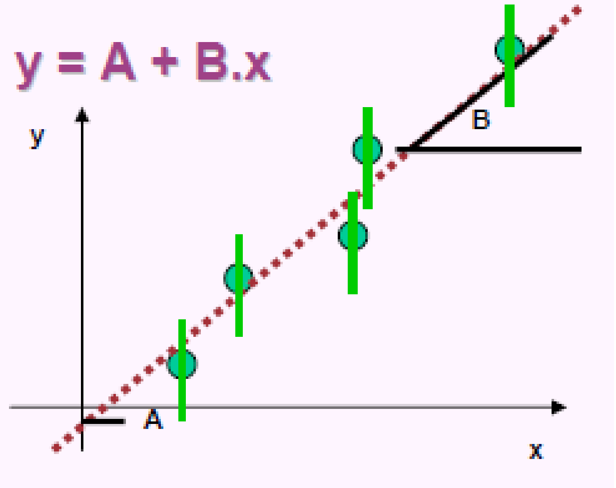
Habría que tomar alguna distancia a la función que tenga en cuenta δx_i y δy_i

Definimos $\delta y_i = y_i - f(x_i,a,b,c,\ldots)$

Buscamos a,b,c,… que minimicen la suma cuadrática de las distancias de los puntos a la función de ajuste

$$minimo \sum_{i=1}^{n} (\delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, a, b, c, \ldots))^2$$

Ajustes de resultados: El caso de ajustes de puntos que están sobre una recta



Medimos n pares (x_i,y_i) y tratamos de encontrar a,b que mejor "ajuste" la expresión y = a + b.x

Suposiciones:

- el error en x es mucho menor que el de y
- los errores en y son similares

Definimos $\delta y_i = y_i - a - b.x_i$

Buscamos a,b que minimicen la suma cuadrática de las distancias de los puntos a la recta de ajuste

$$minimo \sum_{i=1}^{n} (\delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

Busquemos los parámetros a,b que optimicen el ajuste de la recta…

$$minimo \ \sum_{i=1}^{n}(\delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(\delta y_i)^2}{\partial a} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - na - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \qquad (1)$$

$$\overline{Y} - a - b\overline{X} = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(\delta y_i)^2}{\partial b} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - b\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 0 \qquad (2)$$

Despejando de (1) y (2)…

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)}{\Delta}$$

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\Delta}$$

$$\Delta = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{1=1}^{n} x_i\right)^2$$

Por propagación de errores se obtienen los errores de a y b siendo:

$$\sigma_a^2 = \sigma_y^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\Delta} \qquad \sigma_b^2 = \sigma_y^2 \frac{n}{\Delta} \qquad \sigma_y^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$$

para identificar si los puntos medidos responden a un comportamiento lineal definimos:

r: coeficiente de correlación:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

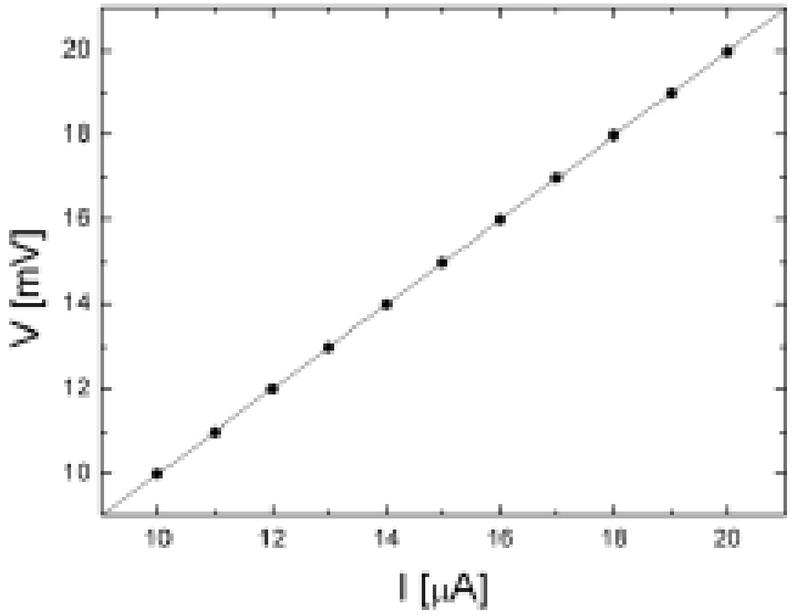
r varía de 1 a -1 (1 recta perfecta con pendiente positiva, -1 con pendiente negativa

Atención: mirar siempre los "residuos"!!!

σ_{xy}**: covarianza**

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta x_i \delta y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

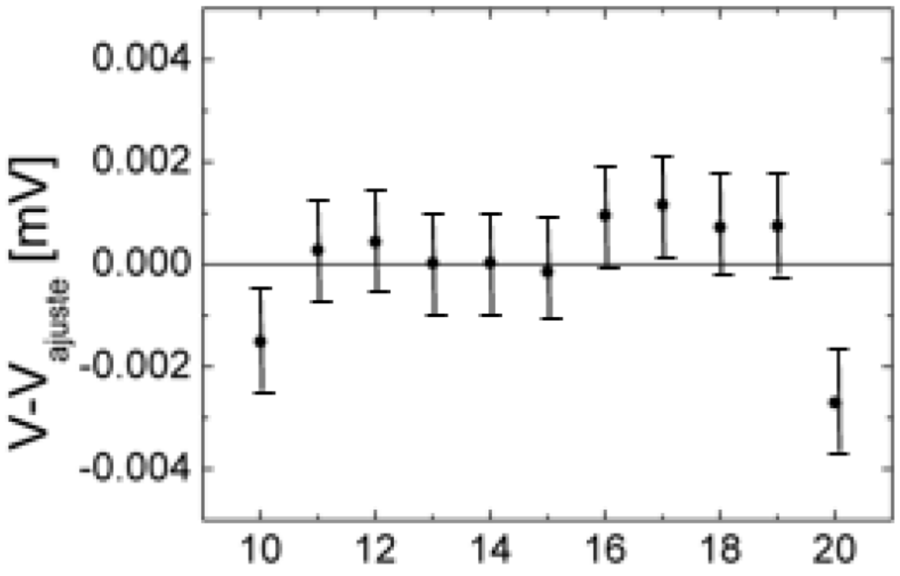
Veamos este caso……



El resultado da

V = (1±2) μV + (999.0±0.1) Ω * I

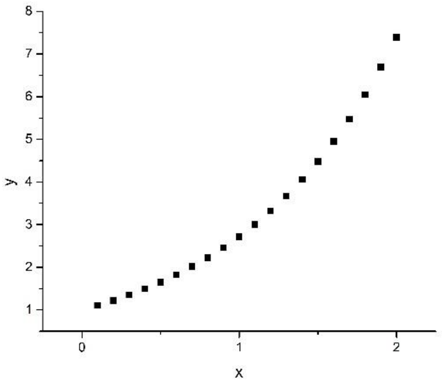
Y los residuos son…

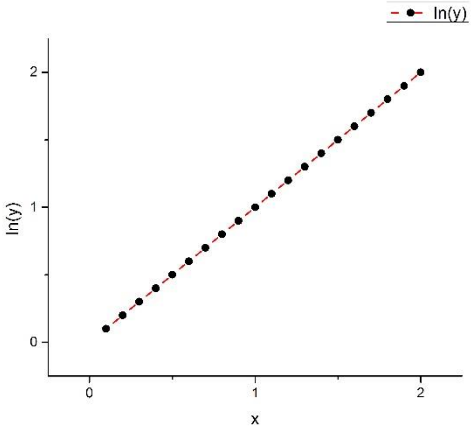


Linealicemos funciones……

Los puntos siguen una exponencial

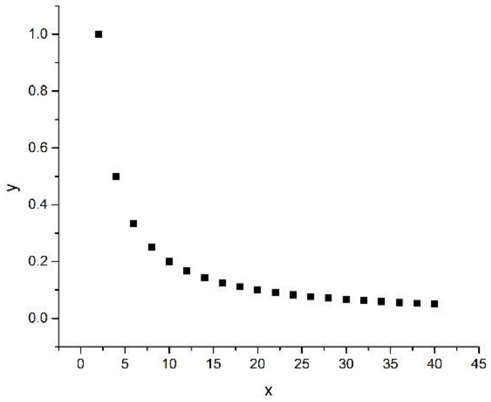
y = ln (x)

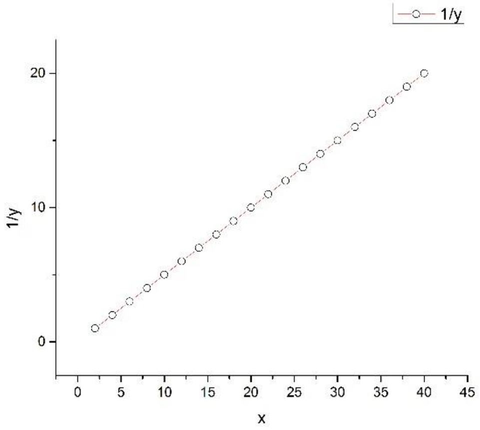




Los puntos siguen la función inversa

y = 1/x

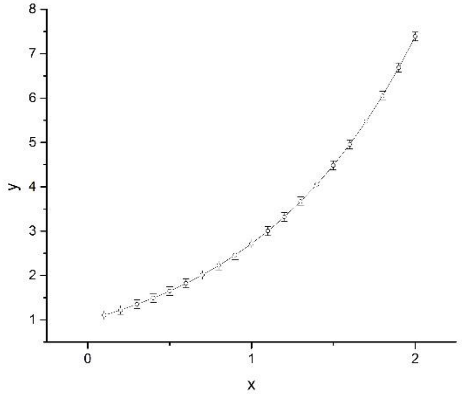




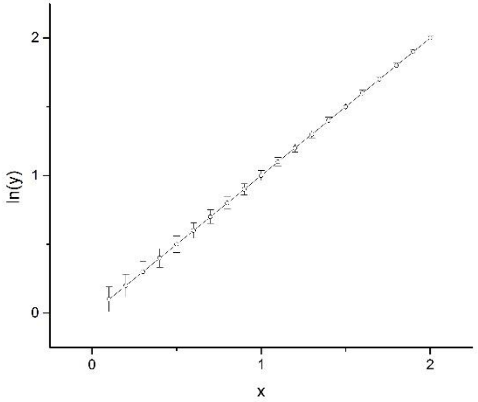
Atención: ahora los errores en y no son todos iguales!

Linealicemos funciones……

Los puntos siguen una exponencial

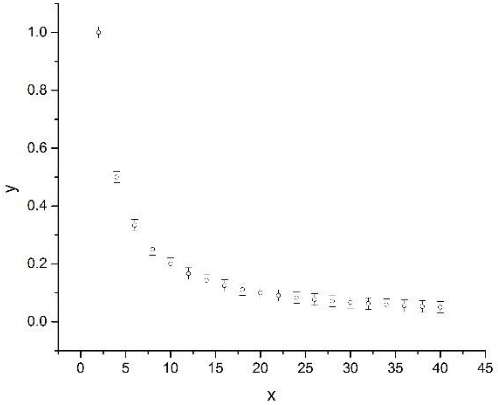


$y' = \ln(y)$

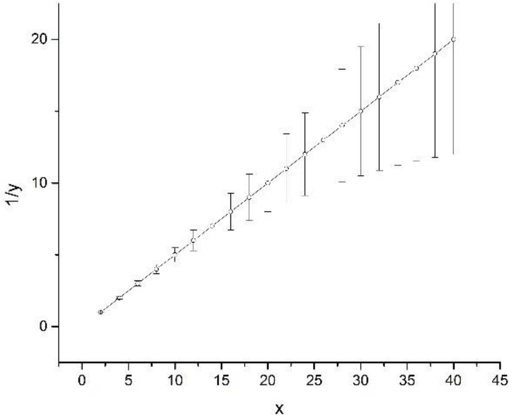


$$\sigma_{ln(y_i)} = \frac{1}{|y_i|}\sigma_{y_i}$$

Los puntos siguen la función inversa



$y' = 1/y$



$$\sigma_{1/y_i} = \frac{1}{y_i^2}\sigma_{y_i}$$

Atención: ahora los errores en y no son todos iguales!

Una opción es hacer ajustes ponderados con $P_i=1/\sigma_i^2$