

Introducción a Partículas y Física Nuclear

Guía 09

1er semestre 2015

1. Verificar que las matrices $\vec{\alpha}$ y β dadas por

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli e I es la identidad en dos dimensiones, satisfacen los requerimientos de la ecuación de Dirac, es decir que son hermíticas, de traza nula y poseen autovalores ± 1 . Mostrar que además satisfacen el álgebra de Dirac:

$$\begin{aligned} \{\alpha_i, \alpha_j\} &\equiv \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}, & \alpha_i^2 &= 1, \\ \{\alpha_i, \beta\} &\equiv \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, & \beta^2 &= 1. \end{aligned}$$

Mostrar que el conjunto de matrices $\{U\alpha_i U^\dagger, U\beta U^\dagger\}$, con U una matriz unitaria, también satisface las condiciones de Dirac.

2. (*) a) Demostrar que el Hamiltoniano de Dirac $\hat{H}$ de una partícula libre conmuta con el operador de impulso lineal $\vec{p}$, no conmuta con el operador de impulso angular orbital $\vec{L}$ ni con el operador de espín

$$\vec{\Sigma} \equiv \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

pero sí lo hace con el de impulso angular total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{\Sigma}$.

b) Mostrar que el operador $\vec{\Sigma}$ definido de esa manera satisface el álgebra de impulsos angulares y tiene autovalores $\pm \frac{1}{2}\hbar$.

c) Definiendo el operador helicidad $\hat{h} = 2\vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$, calcular $[\vec{p}, \vec{\Sigma}]$, $[\hat{H}, \hat{h}]$, $[\vec{p}, \hat{h}]$. ¿Se pueden encontrar estados que sean simultáneamente autoestados de $\hat{h}$, $\hat{H}$ y $\vec{p}$?

3. Mostrar que la onda plana

$$\Phi(x, t) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu\right)$$

es solución de la ecuación de Klein-Gordon. ¿Es solución una combinación lineal de ondas planas? Verificar que cada componente de un fermión de Dirac satisface la ecuación de Klein-Gordon: $(\partial^2 + m^2)\Psi_i = 0$.

4. a) Mostrar que $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, conocido como el *operador de quiralidad*, es hermítico, de cuadrado unitario, y anticonmuta con las cuatro matrices γ de Dirac. ¿Cuáles son sus autovalores? Mostrar que los operadores $P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$ son proyectores y proyectan sobre estados de quiralidad bien definida.
- b) Demostrar que en el límite altamente relativista, la acción de γ^5 sobre los espinores $u_i(\vec{p})$ es la misma que la de $\hat{h}$, es decir γ^5 coincide con el operador de helicidad:

$$\gamma^5 u^{(i)}(\vec{p}) = \hat{h} u^{(i)}(\vec{p}).$$

- c) Verificar que para las antipartículas los signos de quiralidad y helicidad son opuestos

$$\gamma^5 v^{(i)}(\vec{p}) = -\hat{h} v^{(i)}(\vec{p}).$$

5. Considerar la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético ($p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu$).
- a) Mostrar que en el límite no relativista $u_B \sim \frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) u_A$, donde u_A y u_B son las componentes superior e inferior del espinor de Dirac.
- b) Usando este resultado, probar que

$$\left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + eA^0 - \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right] u_A = (E - m) u_A .$$

(En consecuencia, el factor giromagnético del electrón es igual a 2).

6. (*) La operación de *conjugación de carga* se define como

$$\Psi_c = C\Psi^*$$

donde la matriz C satisface $C^2 = 1$, $C^\dagger = C$, $C\gamma^{\mu*}C = -\gamma^\mu$

- a) Mostrar que si Ψ satisface la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético, entonces Ψ_c satisface la misma ecuación cambiando el signo de la carga.
- b) Probar que $C = i\gamma^2$ en la representación estándar de matrices de Dirac.
- c) El siguiente conjunto de matrices

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}$$

se conoce como representación de Majorana, demostrar que da lugar a una representación de las matrices de Dirac en la cual C es la identidad.

7. Un fermión relativista libre está descrito a $t = 0$ (en la representación de Pauli-Dirac) por el espinor:

$$\psi(\vec{x}, t=0) = N \begin{pmatrix} e^{ipz} - \frac{p}{E+m} e^{ipx} \\ -\frac{p}{E+m} e^{ipx} \\ \frac{p}{E+m} e^{ipz} + e^{ipx} \\ e^{ipx} \end{pmatrix}$$

con $E = \sqrt{p^2 + m^2}$. Encontrar la evolución temporal para $t > 0$. ¿Qué valores de helicidad espera medir a tiempo $t > 0$?