# TRATAMIENTO ESTADÍSTICO DEL "RUIDO" EN LA MEDICIÓN

## Julio Guimpel

Estas páginas son un resumen tipo ayuda-memoria para el tratamiento estadístico del ruido en la medición. No se demostrarán las ecuaciones a las que se llega. Sin embargo, se enumerarán y explicarán claramente las hipótesis, que usualmente condicionan el rango de validez de las fórmulas. Este resumen no pretende ni puede reemplazar ninguno de los textos que existen al respecto, tales como el libro de Taylor, [1] el de Roederer, [2] el de Cernuschi-Greco,[3] o el de Beers. [4] Sugiero al lector que, para un entendimiento exhaustivo de este tema, utilice uno de estos textos.

## Índice

1.	El Problema	2
2.	El Modelo	<b>2</b>
3.	Estimadores de los parámetros	3
4.	Propagación de incertezas         4.1. Medición simultánea de x e y         4.2. Medición independiente de x e y	<b>4</b> 4 5
5.	Ajuste de curvas         5.1. Ajuste no lineal         5.2. Ajuste lineal         5.3. Caso particular: Ajuste de una recta	<b>5</b> 6 7
6.	Instrumentos digitales	8

## 1. El Problema

El proceso de medición de una magnitud física se ve afectado por

- el valor de la magnitud a ser medida  $(\mu)$ ,
- los errores sistemáticos que se cometan  $(x_{es})$ ,
- las fluctuaciones debidas a fuentes de señal espurias, usualmente denominadas "ruido"  $(x_r)$ .

De esta manera, el resultado de una medición (x) será función de  $\mu$ ,  $x_{es}$  y  $x_r$ . El principal problema a resolver para asegurar una medición exitosa de  $\mu$  es **eliminar los errores sistemáticos**, ya que los mismos modifican la variable medida siempre de la misma manera y no son susceptibles de ser analizados por repetición de la medición. En lo que sigue, se asumirá que esto ya ha sido logrado, por lo que el resultado de una medición está sólo afectado por  $\mu$  y por  $x_r$ .

Resta encontrar un procedimiento para reducir el efecto de  $x_r$  sobre la medición de  $\mu$ . No se usará la denominación usual de "teoría de errores", ya que en principio no se está cometiendo ningún error en la medición. El procedimiento arrojará el resultado como un valor más probable y un rango dentro del cual se podrá asegurar, con un cierto grado de "certeza", que está contenido el valor real  $\mu$  de la magnitud.

## 2. El Modelo

Para construir el modelo de análisis del ruido en la medición se usarán varias hipótesis. Si alguna de estas no es cierta en un caso particular, será necesario revisar el modelo.

- I) Debido a que las fuentes de ruido son, en general, múltiples y no controladas, el valor de  $x_r$  en una medición se puede considerar como **aleatorio**.
- II) Entre dos mediciones sucesivas los valores de  $x_r$  no están correlacionados. Esto es, el valor de  $x_r$  en la medición i + 1 no está condicionado de ninguna manera por qué valor tuvo  $x_r$  en la medición i.
- III) El valor del ruido es **aditivo** con la magnitud que se desea medir,  $x = \mu + x_r$ .
- IV) La amplitud del ruido es mucho mas grande que la resolución del instrumento de medición. De esta manera se puede ignorar la discretización dada por la resolución del instrumento y pensar en variables matemáticas continuas.<sup>1</sup>
- V) Sabiendo que, en general, el ruido tiene una distribución simétrica y acotada con un máximo central, se asume que la distribución de  $x_r$  es **gaussiana**. Esta suposición se basa en el "Teorema Central del Límite", nuevamente considerando que las fuentes de ruido son múltiples y de valor acotado.

En base a este conjunto de hipótesis, el modelo que se usará considera la existencia de un "valor verdadero" de la magnitud a medir,  $\mu$ , y un ruido de distribución gaussiana con ancho o "varianza"  $\sigma$  alrededor de  $\mu$ . La probabilidad que una medición caiga en el intervalo dx alrededor de x está dada por

 $<sup>^{1}</sup>$ El caso en que esta hipótesis no se cumple será discutido en la sección 6.

$$G(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \tag{1}$$

El problema, ahora, se reduce a encontrar la manera de estimar los valores de  $\mu$  y  $\sigma$ , dado un conjunto de mediciones.

## 3. Estimadores de los parámetros

La situación usual en el laboratorio consiste en que se ha medido repetitivamente una magnitud física, acumulando un conjunto de N valores  $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ . En el modelo propuesto, la mejor "estimación" que se puede hacer para  $\mu$  es el **promedio** 

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{2}$$

y la mejor "estimación" que se puede hacer para  $\sigma$  es la desviación standard  $^2$ 

$$s^{2} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_{i} - \bar{x})^{2}$$
(3)

Se puede demostrar que la variable  $\bar{x}$  es, a su vez, una variable aleatoria con distribución gaussiana centrada en  $\mu$  y varianza  $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{N}$ , la que se puede estimar estadísticamente con la desviación estándar del promedio

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{s^2}{N} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$
(4)



Figura 1: Distribución de probabilidad gaussiana para una medición individual, G(x), y para el promedio de 10 mediciones,  $G(\bar{x})$ . Se destaca la igualdad de valores medios  $\mu$  y la disminución de  $\sigma$  en un factor  $\sqrt{10}$  para  $G(\bar{x})$ .

El resultado final de la medición se expresa, tradicionalmente, como  $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$ . Se indica con esta notación que, de acuerdo a la distribución gaussiana, hay un 68 % de probabilidad que  $\mu$  se encuentre en el intervalo  $[\bar{x} - s_{\bar{x}}, \bar{x} + s_{\bar{x}}]$ . En otras palabras, se tiene una certeza del 68 %, o incerteza del 32 %, que  $\mu$  esté comprendido en el intervalo propuesto.<sup>3</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>El cuadrado de la desviación standard es, a su vez, una variable aleatoria que sólo toma valores positivos y obedece una distribución  $\chi^2$ . Esta distribución presenta una forma de pico, con un ancho que depende de N, haciéndose más angosta para N creciente. Se encuentra que el ancho es del orden de la posición del máximo hasta cantidades de mediciones tan grandes como N = 100, lo que justifica por qué la incerteza se reporta con sólo una cifra significativa.

 $<sup>^{3}</sup>$ En realidad, para definir el porcentaje de probabilidad que corresponde al intervalo propuesto, es necesario

## 4. Propagación de incertezas

Otra situación usual en el análisis de datos experimentales se presenta cuando es necesario calcular una variable como función de magnitudes que han sido medidas con un grado de incerteza. Se presentarán aquí las fórmulas particularizadas al caso de una variable z que es función de dos magnitudes x e y, z = f(x, y), porque el resultado es directamente generalizable a otros casos.

Se tratarán por separado los dos casos experimentales más usuales. Si bien se verá que las fórmulas finales a las que se llega son las mismas, la discusión permitirá definir mejor los conceptos involucrados.

Una hipótesis importante que se usa para llegar a los resultados que se enunciarán es que las incertezas en las mediciones de las magnitudes x e y son lo suficientemente chicas como para poder utilizar un desarrollo en serie de Taylor a primer orden para las variaciones de z alrededor de su valor medio.

#### 4.1. Medición simultánea de x e y

En este caso se obtienen N pares de valores  $(x_i, y_i)$  midiendo en forma simultánea  $x_i \in y_i$ para cada uno de ellos. Esto significa que se pueden definir N valores  $z_i = f((x_i, y_i))$  y utilizar los resultados de la sección 3. Definiendo los promedios  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$  a través de la ecuación (2), se encuentra:

$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

$$s_{\bar{z}}^{2} = \left[ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Big|_{\bar{x},\bar{y}} s_{\bar{x}} \right]^{2} + \left[ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Big|_{\bar{x},\bar{y}} s_{\bar{y}} \right]^{2} + 2 \left[ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Big|_{\bar{x},\bar{y}} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Big|_{\bar{x},\bar{y}} \frac{s_{xy}}{N} \right]$$

$$s_{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_{i} - \bar{x}) (y_{i} - \bar{y})$$
(5)

donde la covarianza  $(s_{xy})$  es el estimador de la correlación entre el ruido en x y el ruido en y.

El concepto de la covarianza entre los ruidos de dos variables medidas, es de extrema importancia, pudiendo conducir a errores muy importantes en los resultados de la propagación si no es adecuadamente considerado. [5]

¿Como pueden dos ruidos ser correlacionados, si la idea intuitiva del origen del ruido es la aleatoriedad del mismo? La respuesta, justamente, yace en un origen no aleatorio para algunos casos. Quizás la mejor explicación es a través de un ejemplo. Para medir la resistencia eléctrica (R) de un elemento, es usual conectarlo en serie con una resistencia conocida  $(R_p)$  y una fuente de corriente. El valor de R se calcula a través de los voltajes en R y en  $R_p$ , ver figura 2.

Si la fuente no fuera estable, la corriente a través del circuito variaría con el tiempo. A causa de esto los voltajes en las resistencias variarán en forma correlacionada, aumentando ambos o disminuyendo ambos simultáneamente. En este caso, los valores de R calculados a partir de los voltajes tendrán una incerteza pequeña, aunque las incertezas en cada uno de los voltajes sean grandes.

Para completar esta discusión, también es necesario discutir las causas experimentales por las cuales se puede perder esta correlación. En el ejemplo discutido previamente, si los valores de voltaje no se miden en forma exactamente simultánea, y si el tiempo entre la medición de uno y otro es

estudiar no una distribución gaussiana sino una distribución t de Student. Se estudia, de todas maneras, una gaussiana pues se encuentra que para un conjunto de 20 mediciones o más ambas distribuciones son casi indistinguibles.

Figura 2: Circuito para la medición de una resistencia R, por comparación con una resistencia conocida  $R_p$ . La resistencia se calcula en base a los voltajes indicados en la figura como  $R = R_p V/V_p$ 



mayor que el tiempo característico de fluctuación de la fuente de corriente, la correlación entre los ruidos de los dos voltajes se pierde. Se cumplirá, entonces,  $s_{xy} = 0$ .<sup>4</sup>

#### 4.2. Medición independiente de x e y

En este caso se determina x a través de una serie de N mediciones, e independientemente se determina y a través de otra serie de M mediciones, obteniéndose como resultado  $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$  e  $\bar{y} \pm s_{\bar{y}}$ . Es claro que sólo se puede calcular un único valor de  $z = f(\bar{x}, \bar{y})$ .

Para estimar la incerteza de este valor de z, debemos tener en cuenta que:

- I) la incerteza en el mismo está asociada a las incertezas de  $\bar{x} \in \bar{y}$ , que pueden ser evaluadas, pues se tiene un conjunto de mediciones para cada una de estas magnitudes;
- II) la correlación entre los ruidos en  $x \in y$  es nula pues han sido medidos en forma independiente, siendo entonces  $s_{xy} = 0$ .

Utilizando estas hipótesis y un desarrollo en serie de Taylor de z alrededor de su valor medio se concluye que z y  $s_z$  se evalúan con las mismas fórmulas (5), particularizadas al caso  $s_{xy} = 0$ .

## 5. Ajuste de curvas

Un procedimiento usual en el análisis de datos es el ajuste de una función teórica, dependiente de M parámetros  $a_j$ ,  $y = f(x, a_1, a_2, ..., a_M)$ , a un conjunto de N puntos experimentales  $(x_i, y_i)$ . Las hipótesis que se considerarán son:

- I) el número de puntos experimentales medidos es mayor que el número de parámetros a ajustar, N > M;
- II) el ruido en los valores  $x_i$  es mucho menor que el ruido en los valores  $y_i$ , por lo que se considera que los primeros no tienen ruido y toda la incerteza se debe a los segundos;<sup>5</sup>
- III) el ruido de la magnitud y cumple las hipótesis de la sección 2 y puede ser considerado gaussiano;
- IV) se ha elegido la función teórica y = f(x) correcta y no se tratará de ajustar algo que no tiene sentido.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Por ejemplo, si la inestabilidad de la fuente de corriente es un ripple de 50 Hz, los voltímetros usuales, que adquieren unos pocos datos por segundo, no detectarán correlación entre los ruidos de los dos voltajes.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Esta hipótesis no es tan restrictiva como parece. Un ruido  $s_x$  no puede ser distinguido de un ruido  $s_y = \frac{\partial f}{\partial x} s_x$ .

Bajo estas condiciones se puede demostrar que el conjunto de valores  $a_j$  que mejor ajustan la función teórica a los datos experimentales es aquel que minimiza la diferencia cuadrática, definida como <sup>6</sup>

$$\chi^{2} = \sum_{i=1}^{N} \left[ \frac{y_{i} - f(x_{i}, a_{1}, a_{2} \dots a_{M})}{\sigma_{y_{i}}} \right]^{2}$$
(6)

El problema del ajuste se transforma ahora en el problema matemático de encontrar el mínimo de una función en un espacio de M dimensiones. Esto divide los casos posibles en dos grandes grupos:

#### 5.1. Ajuste no lineal

En este caso la función  $f(x_i, a_1, a_2, \ldots, a_M)$  no es lineal en los parámetros  $a_j$ . En general, esto conduce a que la minimización de  $\chi^2$  no tenga solución analítica y se deban utilizar métodos numéricos para encontrar los  $a_j$ . Los dos métodos usualmente usados para este problema son el SIMPLEX y el método de Levenberg-Marquardt. Si bien no trataremos aquí esos métodos mas allá de nombrarlos, diremos que como regla general el primero es adecuado cuando no se tiene claro si se está muy lejos del mínimo para el conjunto de parámetros  $a_j$  inicial, y el segundo ha probado ser de convergencia muy rápida cuando el conjunto de parámetros  $a_j$  inicial está cercano al mínimo absoluto de  $\chi^2$ .[6]

#### 5.2. Ajuste lineal

En este caso, la función a ajustar es lineal en los parámetros  $a_j$ ,

$$f(x, a_1, a_2, \dots, a_M) = \sum_{j=1}^M a_j g_j(x)$$

donde las  $g_j(x)$  son funciones arbitrarias de la magnitud x y no dependen de los  $a_j$ . <sup>7</sup> Los coeficientes  $a_j$  se obtienen de la solución del sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{M} a_j \sum_{i=1}^{N} \frac{g_j(x_i) g_k(x_i)}{\sigma_{y_i}^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i g_k(x_i)}{\sigma_{y_i}^2} \quad ; k = 1, 2, \dots, M$$
(7)

Las desviaciones standard de estos coeficientes se calculan utilizando los métodos de propagación de incertezas discutidos en la sección 4, una vez conocidas las fórmulas para los  $a_i$ .

Al propagar las incertezas será necesario conocer los  $\sigma_{y_i}$ . ¿Cómo se pueden estimar? Si cada punto  $(x_i, y_i)$  fue medido varias veces, entonces  $\sigma_{y_i}$  se puede estimar a través de la desviación standard, ecuación (3). Sin embargo, la situación más usual en el laboratorio es que cada punto se haya medido una sola vez. Si es válido asumir que  $\sigma_{y_i}$  no es función de  $x_i$ , se puede propone un estimador basándose en la ecuación (3) y en que el ruido gaussiano alrededor de cada  $y_i$  tiene el mismo valor de  $\sigma$ . De esta manera, Aunque los  $x_i$  y por consiguiente los  $\bar{y}_i = f(x, a_1, a_2 \dots a_M)$ 

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Una hipótesis adicional que se suele usar, pero que no es siempre válida, es que el "ruido", en las magnitudes  $y_i$  es constante, o sea independiente de  $x_i$ . En este caso, en la ecuación (6) se puede eliminar el factor  $\sigma_{y_i}$  pues es sólo un factor multiplicativo.

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Es importante no confundir un ajuste lineal, que puede ser con funciones  $g_j$  no lineales en x, con el ajuste de una recta  $y = a_1 + a_2 x$ . Por ejemplo, el ajuste polinómico  $y = \sum_{j=1}^{M} a_j x^j$ , y el ajuste  $y = a_1 \sin x + a_2 \cos x$ , son ajustes lineales.

sean diferentes, las desviaciones  $y_i - \bar{y}_i$  son, estadísticamente, medidas del mismo  $\sigma$ . Es necesario reconocer, además, que sólo hay N - M valores independientes pues la definición de los coeficientes  $a_j$  impone M vínculos. Entonces, se propone

$$\sigma_y^2 \simeq s_y^2 = \frac{1}{N - M} \sum_{i=1}^N \left( y_i - f(x, a_1, a_2 \dots a_M) \right)^2 \tag{8}$$

como estimador para  $\sigma_{y_i}^2$ .

#### 5.3. Caso particular: Ajuste de una recta

Como caso particular, pero sumamente usado, se considera el ajuste de una recta a un conjunto de puntos experimentales. En este caso el número de parámetros a ajustar es M = 2 y  $f(x, a_1, a_2) = a_1 + a_2 x$ . Aplicando los métodos definidos en la sub-sección anterior llegamos a

$$a_{1} = \Gamma^{-1} \left( \sum_{i=1}^{N} y_{i} / \sigma_{y_{i}}^{2} \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} / \sigma_{y_{i}}^{2} - \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i} / \sigma_{y_{i}}^{2} \sum_{i=1}^{N} x_{i} / \sigma_{y_{i}}^{2} \right) \qquad s_{a_{1}}^{2} = \Gamma^{-1} \left( \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} / \sigma_{y_{i}}^{2} \right)$$

$$a_{2} = \Gamma^{-1} \left( \sum_{i=1}^{N} 1 / \sigma_{y_{i}}^{2} \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i} / \sigma_{y_{i}}^{2} - \sum_{i=1}^{N} x_{i} / \sigma_{y_{i}}^{2} \sum_{i=1}^{N} y_{i} / \sigma_{y_{i}}^{2} \right) \qquad s_{a_{2}}^{2} = \Gamma^{-1} \left( \sum_{i=1}^{N} 1 / \sigma_{y_{i}}^{2} \right)$$

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{N} 1 / \sigma_{y_{i}}^{2} \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} / \sigma_{y_{i}}^{2} - \left( \sum_{i=1}^{N} x_{i} / \sigma_{y_{i}}^{2} \right)^{2}$$

$$(9)$$

Respecto a la correlación entre las variaciones de  $a_1$  y de  $a_2$ , por un argumento simple se puede demostrar que es no nula. Si se define el "baricentro" de los datos  $x \in y$  como

$$x_{b} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{i} / \sigma_{y_{i}}^{2}}{\sum_{i=1}^{N} 1 / \sigma_{y_{i}}^{2}} \qquad \qquad y_{b} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_{i} / \sigma_{y_{i}}^{2}}{\sum_{i=1}^{N} 1 / \sigma_{y_{i}}^{2}}$$
(10)

por simple reemplazo se puede demostrar que la recta de ajuste pasa por este punto. Dado que este punto es un promedio pesado de los N valores experimentales, cada vez que se repita el conjunto de N mediciones será  $\sqrt{N}$  veces más estable que cada punto individual. Entonces, en primera aproximación, se puede considerar que es un punto fijo. Al repetir el conjunto de mediciones y ajustar una recta al nuevo conjunto de datos, esta "pivotará" alrededor de este punto, generando una correlación entre las variaciones de  $a_1$  y  $a_2$  alrededor de sus valores mas probables. Se puede demostrar [5] que la covarianza entre estos coeficientes vale

$$s_{a_1 a_2} = -\frac{x_b}{\Gamma} \sum_{i=1}^N 1/\sigma_{y_i}^2$$
(11)

Se demuestra, también, que  $\Gamma$  es definido positivo, por lo que la correlación tiene el signo opuesto a  $x_b$ . Si  $x_b > 0$  entonces  $s_{a_1a_2} < 0$ , lo que implica que una desviación positiva en la ordenada al origen conlleva una desviación negativa en la pendiente. Si  $x_b < 0$  sucede lo opuesto. Sólo en el caso que  $x_b = 0$ ,  $a_1 \ge a_2$  tienen ruido no correlacionado.

La incerteza de un valor  $y_o$  calculado a través de la ecuación de la recta en  $x_o$  se evalúa como

$$y_o = a_1 + a_2 x_o \qquad \qquad s_{y_o}^2 = s_{a_1}^2 + x_o^2 s_{a_2}^2 + 2x_o s_{a_1 a_2} \tag{12}$$

Para el caso en que los  $\sigma_{y_i}$  son independientes de  $y_i$ , el conjunto de ecuaciones (9), (10) y (11) se simplifican a:

$$a_{1} = \Gamma^{-1} \left( \sum_{i=1}^{N} y_{i} \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} - \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i} \sum_{i=1}^{N} x_{i} \right) \qquad s_{a_{1}}^{2} = \Gamma^{-1} \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} s_{y}^{2}$$

$$a_{2} = \Gamma^{-1} \left( N \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i} - \sum_{i=1}^{N} x_{i} \sum_{i=1}^{N} y_{i} \right) \qquad s_{a_{2}}^{2} = N \Gamma^{-1} s_{y}^{2}$$

$$x_{b} = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} \qquad s_{a_{1}a_{2}} = -\bar{x} \Gamma^{-1} s_{y}^{2}$$

$$\Gamma = N \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} - \left( \sum_{i=1}^{N} x_{i} \right)^{2} \qquad s_{y}^{2} = \frac{1}{N-M} \sum_{i=1}^{N} (y_{i} - f(x, a_{1}, a_{2} \dots a_{M}))^{2}$$

$$(13)$$

## 6. Instrumentos digitales

En el uso de un instrumento digital, la hipótesis sobre que se está trabajando con variable continua ya no es cierta. Los resultados posibles de una medición son discretos, o sea que las lecturas del instrumento son enumerables y difieren en una cantidad que denominaremos la resolución ( $\Delta$ ).

La forma en que se realiza esta discretización, a la que llamaremos la "respuesta" del instrumento, es importante para construir el modelo de análisis. Existen dos posibilidades, graficadas en la figura 3:

- 1) El proceso de medición del instrumento redondea el valor de entrada (x) al valor de salida  $(x_s)$  mas cercano. El rango de valores de entrada  $x_s \Delta/2 \le x \le x_s + \Delta/2$  produce la lectura  $x_s$ .
- 2) El proceso de medición del instrumento redondea el valor de entrada al valor de salida  $x_s$  inmediato inferior. El rango de valores de entrada  $x_s \leq x \leq x_s + \Delta$  produce la lectura  $x_s$ .

Como se observa en la figura 3, ambas respuestas son muy similares, difiriendo sólo en una traslación en  $\Delta/2$  en el eje de las abscisas. Sin demasiada pérdida de generalidad, entonces, se asumirá que el instrumento redondea, ya que es el caso más directo para ser analizado. Veremos que la diferencia en el análisis de ambos casos consiste sólo en la necesidad de sumar  $\Delta/2$  al resultado para el caso que la respuesta del instrumento trunque.

Figura 3: La figura muestra las dos posibles respuestas del instrumento digital. En el panel superior el instrumento redondea el valor de entrada x al valor de salida  $x_s$  más cercano, mientras que en el panel inferior el instrumento trunca el valor de entrada al valor de salida inmediato inferior. Ambas funciones difieren sólo en un corrimiento en el eje de las abscisas de  $\Delta/2$ .



Para construir un modelo que permita analizar esta situación, se asume nuevamente que la señal de entrada al instrumento tiene una distribución gaussiana continua, G(x), dada por la ecuación (1).



Figura 4: En la figura se esquematiza el modelo para el estudio de las lecturas en instrumentos digitales. Las líneas verticales indican las posibles lecturas  $x_s$ del instrumento. La línea sólida muestra la distribución de probabilidad G(x)de la señal de entrada al mismo, en este gráfico consistente en una distribución gaussiana con  $\mu = 2,333 \Delta$  y  $\sigma = \Delta$ . Los puntos indican la probabilidad  $p(x_s)$  que una lectura valga  $x_s$ . Asumiendo que la respuesta del instrumento redondea el valor de entrada al valor de salida más próximo, el área sombreada indica el valor de  $p(\Delta)$ .

La probabilidad  $p(x_s)$  que una lectura valga  $x_s$  está dada por  $p(x_s) = \int_{x_s - \Delta/2}^{x_s + \Delta/2} G(x) dx$ . En la figura 4 se grafican G(x) y  $p(x_s)$  para un caso particular de los parámetros. También se indica el significado de  $p(x_s)$  con el área sombreada.<sup>8</sup>

¿Cuantas veces se obtendrá la lectura  $x_s$  en un conjunto de mediciones? Esto sólo se puede responder en términos de una distribución de probabilidad. Si se toman N mediciones, la probabilidad que en este conjunto aparezca exactamente n veces el resultado  $x_s$  está dada por una distribución binomial

$$B_N(n,x) = \binom{N}{n} p(x)^n [1-p(x)]^{N-n}$$
(14)

para la cual la esperanza matemática es  $\langle n \rangle = N p(x)$ , y la varianza es  $\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = N p(x) [1 - p(x)]$ , que constituyen la respuesta a la pregunta formulada.

En este punto sería necesario definir estimadores cuyo valor medio en esta distribución sean  $\mu$  y  $\sigma$ . Sin embargo, el procedimiento usual es insistir en utilizar las ecuaciones (2) y (3) y calcular a través de ellas  $\bar{x}$  y  $s^2$ .

Analicemos ahora los distintos casos que se esperan. Consideremos primero el caso en que el ruido de entrada es mucho mayor que la resolución del instrumento,  $\Delta \ll \sigma$ . Este caso es casi trivial, ya que, al ser G(x) básicamente constante en un intervalo  $\Delta$ , entonces  $p(x) = \int_{x-\Delta/2}^{x+\Delta/2} G(x) dx \approx G(x)\Delta$  y se recupera la distribución gaussiana.<sup>9</sup> Todos los métodos discutidos en la sección 3 son válidos y podemos ignorar la discretización dada por el instrumento digital, tal como se postuló en la sección 2, hipótesis IV).

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>En esta interpretación gráfica, para un instrumento con respuesta que trunque, la diferencia es que el punto p(x) debe ser ubicado en el extremo izquierdo del área sombreada. Resulta claro, entonces, que un instrumento cuya respuesta redondea, con una entrada centrada en  $\mu$ , genera la misma distribución  $p(x_s)$  que un instrumento cuya respuesta trunca, con una entrada centrada en  $\mu + \Delta/2$ . Por esto, al tratar los resultados de un instrumento que trunque, se deben aplicar los resultados discutidos aquí y sumar  $\Delta/2$  al resultado.

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>En este caso, para instrumentos cuya respuesta trunque, el corrimiento en  $\Delta/2$  puede ser despreciado frente a  $\sigma$ .

El otro caso extremo,  $\sigma \ll \Delta$ , también puede ser considerado trivial, aunque es mas sutil de ser analizado. Este caso se presenta muchas veces en el laboratorio, cuando se preparan cuidadosamente los experimentos. Se observa que el instrumento no presenta variaciones en su lectura debido, justamente, a que el ruido es mucho menor que la resolución. La distribución de  $p(x_s)$  se caracteriza por valer 1 para un único valor  $x_c$ , y 0 para todo otro valor  $x_s \neq x_c$ . La figura 5 muestra este caso para un valor de los parámetros. Si se miden N valores se obtendrá N veces el valor  $x_c$  con lo cual  $\bar{x} = x_c$  y  $s^2 = 0$ . ¿Significa esto que la incerteza del resultado es nula? Claramente no. Ya no es válido utilizar métodos estadísticos para analizar el resultado pues ya no hay nada aleatorio en el mismo. De nada sirve repetir la medición N veces. El redondeo o truncamiento del instrumento se ha convertido en un error sistemático y el resultado debe ser expresado como  $x_c \pm \Delta/2$  para el caso que la respuesta del instrumento redondee, y como  $(x_c + \Delta/2) \pm \Delta/2$  para el caso que la respuesta del instrumento trunque.



Figura 5: La figura muestra el caso en que el ruido de entrada es mucho menor que la resolución del instrumento. En este gráfico la señal de entrada tiene una distribución gaussiana centrada en 2,333  $\Delta$  con  $\sigma = 0,05 \Delta$ . La probabilidad  $p(2 \Delta) \approx 1$ , mientras que la probabilidad  $p(x_s) \approx 0$  para todo otro  $x_s$ .

Los casos intermedios, donde  $\sigma$  es comparable a  $\Delta$ , se analizan numéricamente en la publicación Noise Averaging and measurement resolution ( or " A little noise is a good thing").[7] Allí se encuentra que si el ruido es del orden de la resolución del instrumento, entonces se pueden aplicar los métodos estadísticos discutidos en sección 3, pudiéndose definir  $\bar{x}$  con precisión mejor que  $\Delta$ .

¿Cual es entonces el procedimiento que se puede recomendar cuando se trabaja con instrumentos digitales? No existen fórmulas que se puedan aplicar automáticamente, sin pensar, aunque se puede definir un protocolo susceptible de ser programado. Este consiste en:

- 1) Se adquieren N valores  $x_i$  del instrumento.
- 2) Se calculan  $\bar{x}$  y  $s^2$  a través de las ecuaciones (2) y (3).
- 3) Si  $s \ll \Delta$  entonces se expresa el resultado como  $x_c \pm \Delta/2$  si la respuesta del instrumento redondea, y como  $(x_c + \Delta/2) \pm \Delta/2$  si la respuesta del instrumento trunca.
- 4) Si s es del orden o mayor que  $\Delta$ , entonces se acepta  $s/\sqrt{N}$  como la incerteza de  $\bar{x}$ .

Este protocolo no es estricto en el sentido que deja 3 puntos sin respuesta:

• ¿cuál es el límite exacto en el cual se debe dejar de usar la incerteza estadística y empezar a usar la resolución como el valor correcto de incerteza de medición? Esta pregunta es muy difícil de contestar. Sólo se puede recomendar la lectura de la referencia [7], y un análisis de cuántos valores diferentes se obtuvieron en el conjunto de N mediciones. Si muy pocos valores fueron diferentes del más probable, entonces los métodos estadísticos son cuestionables.

- Si se pueden utilizar los métodos estadísticos, ¿hasta qué punto es razonable aumentar N para disminuir la incerteza? Si se extrapola la teoría desarrollada hasta un extremo irrazonable, entonces no sería necesario comprar instrumentos de mejor resolución y más caros para hacer medidas más precisas. Sólo bastaría comprar, por ejemplo, un voltímetro de mano y tomar muchas mediciones para poder resolver el nanoVolt en el resultado. Claramente esto no es cierto y, nuevamente, no se pueden aplicar las fórmulas sin pensar. Un voltímetro de mano no está diseñado para medir el nanoVolt. Los contactos de entrada seguramente introducirán un offset, y los circuitos internos agregarán offsets internos que falsearán la lectura. Se propone como norma, que no tiene sentido obtener por métodos estadísticos más que un dígito más que la resolución del instrumento.
- Difícilmente se encuentre en los manuales de los instrumentos la información sobre si la respuesta del mismo trunca o redondea. Este punto se debe determinar calibrando el instrumento, procedimiento usualmente muy laborioso y difícil. En general, sin embargo, los instrumentos de medición digitales funcionan en base a ADC's. Como los mismos funcionan en base a un conteo de número de pulsos en un tiempo proporcional al voltaje de entrada, la respuesta es del tipo truncamiento. Se sugiere asumir entonces, frente a falta de información, que la función de transferencia trunca.

## Referencias

- [1] John R. Taylor, An introduction to error analysis : the study of uncertainties in physical measurements, 2<sup>nd</sup> edition, University Science Books, Sausalito CA,1997.
- [2] J. Roederer, capítulo en Mecánica elemental, Eudeba, Buenos Aires, 1963.
- [3] Félix Cernuschi, Francisco I. Greco, Teoría de errores de mediciones, 2<sup>da</sup> edición, Eudeba, Buenos Aires, 1974.
- [4] Yardley Beers, Introducción a la teoría de los errores, ETHA, Buenos Aires, 1962.
- [5] John R. Taylor, "Simple examples of correlations in error propagation", Am. J. Phys. 53, 663 (1985).
- [6] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, 3<sup>rd</sup> edition, Cambridge University Press, 2007.
- [7] James Potzick, Noise Averaging and measurement resolution (or "A little noise is a good thing"), Rev. Sci. Inst. **70**, 2038 (1999).