18-5-2015

Introducción a Partículas y Física Nuclear
Guía 10
1er semestre 2015

1. La ecuación de Dirac para una partícula libre tiene cuatro soluciones linealmente independientes asociadas al mismo valor de energía-impulso ($\vec{p}$ y E):

$$\Psi(x,t) = u^{(i)}(\vec{p})\ e^{-i(E\,t-\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}, \qquad u^{(i)}(\vec{p}) = N\left(\begin{array}{c} \chi_i \\ \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\,\chi_i \end{array}\right), \qquad (i=1,2)$$

y

$$\Psi(x,t) = v^{(i)}(\vec{p})\ e^{i(E\,t-\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}, \qquad v^{(i)}(\vec{p}) = N\left(\begin{array}{c} \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\,\chi_i \\ \chi_i \end{array}\right), \qquad (i=1,2),$$

con $E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}>0$, N una constante de normalización, $\chi_1 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right)$ y $\chi_2 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right)$.

a) Verificar explícitamente que son soluciones.
b) Mostrar que para $\vec{p}=0$ se recuperan las soluciones en reposo.
c) Estudiar la ortogonalidad de las soluciones.

2. Una representación posible para las matrices α y β es la representación de Weyl:

$$\bar{\alpha} = \left(\begin{array}{cc} -\bar{\sigma} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} \end{array}\right), \qquad \beta = \left(\begin{array}{cc} 0 & I \\ I & 0 \end{array}\right).$$

Verificar que es una representación.

3. El grupo de las rotaciones en el espacio $I\!R^3$ puede definirse como el grupo de matrices R reales de 3×3 tales que: $R\,R^t = R^t\,R = \mathbf{1}$ y $\det R = 1$, y puede parametrizarse por tres ángulos θ_i, $i=1,2,3$. El operador de rotaciones es: $U(\vec{\theta}) = e^{i\vec{\theta}.\vec{j}}$, donde $\vec{j}$ es el generador de rotaciones en el espacio correspondiente.
(a) Muestre que el producto escalar de vectores es invariante bajo rotaciones.
(b) Muestre que el operador de rotaciones para espín $\frac{1}{2}$ ($\vec{j}=\frac{\vec{\sigma}}{2}$) es: $U(\vec{\theta}) = \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{i}{2}\hat{\theta}.\vec{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}$.

4. El grupo de Lorentz (propio y ortócrono) puede definirse como el grupo de matrices Λ reales de 4×4 tales que: $\Lambda\,\Lambda^t = \Lambda^t\,\Lambda = \eta$, $\det(\Lambda)=1$ y $\Lambda^0{}_0 \geq 0$, donde los elementos de Λ son $\Lambda^\mu{}_\nu$, $(\Lambda\,\Lambda^t)_{\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \eta_{\mu\nu}$ y $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.
(a) Obtenga la transformación de Lorentz correspondiente a un boost en el eje $\hat{y}$, y a una rotación en torno al eje $\hat{z}$, estudie el límite infinitesimal de dichas transformaciones.
(b) Identifique los seis parámetros correspondientes a una transformación de Lorentz (tres parámetros para boosts y tres para rotaciones).
(c) Muestre que el producto escalar de cuadrivectores es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

5. **(*)** De manera análoga al grupo de las rotaciones, el operador de transformaciones de Lorentz es: $S(\epsilon) = e^{\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}}$, donde $\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\mathcal{J}^{\nu\mu}$ son los generadores de boosts y rotaciones, y $\epsilon_{\mu\nu}$ son los parámetros correspondientes. En el caso de los espinores de Dirac, los generadores $\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$.
(a) Mostrar que para un boost en el eje $\hat{x}$, con $\epsilon_{01}=\phi$: $S(\epsilon_{01}) = \mathbf{1}\cosh\frac{\phi}{2} + \gamma^0\gamma^1\sinh\frac{\phi}{2}$ ($\tanh\phi = v/c$).
(b) Mostrar en el caso particular del punto anterior que S no es unitaria y que: $S^\dagger\gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$.
(c) Asumiendo que el último resultado vale para una transformación de Lorentz general, ver que: $\bar{\psi}\psi$ es un invariante de Lorentz.
(d) Mostrar que la corriente $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ transforma como un cuadrivector.

6. Verificar que el operador de espín se puede escribir en términos de las matrices α_j como: $\Sigma = -i\frac{\hbar}{4}\bar{\alpha}\times\bar{\alpha}$.