

Caída de presión de un flujo de inercia despreciable en un canal de sección circular

Autor: Fernando Sikorsky

Fecha: 09/07/14

Resumen:

Se estudió experimentalmente el flujo de un líquido a través de un tubo circular. Las condiciones del flujo se eligieron de forma tal que las fuerzas inerciales sean despreciables frente a las fuerzas viscosas. Como fluido de trabajo se eligió agua y se midió el caudal en función de la diferencia de presiones, para tubos de 0,2, 0,3 y 0,5 mm de diámetro interno. Se pudo observar en todos los casos un comportamiento lineal del caudal respecto de la presión dentro de un error de 0.1% para un rango de números de Reynolds entre 0,0006 y 0,026. Adicionalmente se calculó la viscosidad dinámica del agua obteniendo un valor de $(1,2 \pm 0,3) \times 10^{-3}$ N.s/m².

Introducción

Los flujos de inercia despreciable se presentan por lo general en canales de pequeñas dimensiones, flujos con bajas velocidades características y altas viscosidades. Ejemplos típicos de este tipo de flujos se pueden encontrar en sistemas de lubricación, movimiento de glaciares, movimiento de microorganismos, filtraciones a través de fisuras, etc. Un parámetro adimensional que indica la importancia relativa de las fuerzas inerciales respecto de las viscosas es el número de Reynolds (Re) [1], que se define de la siguiente forma:

$$Re = \frac{DU}{\nu}, \quad (1)$$

donde D es una dimensión característica, U una velocidad característica, y ν la viscosidad cinemática del fluido. Para flujos con Re suficientemente pequeño se puede decir que el flujo posee fuerzas de inercia despreciables frente a las fuerzas viscosas. En el caso particular de canales circulares rectos y de sección constante el flujo posee además una solución analítica. En ese caso la caída de presión por fuerzas viscosas a lo largo del conducto puede ser expresada como [2]

$$\Delta p = -\frac{8 \mu L Q}{\pi R^4}, \quad (2)$$

donde L es la longitud del tubo, $R = D/2$ es su radio interno y μ la viscosidad dinámica del fluido. Podemos ver que según la Ec. (2) la caída de presión será proporcional al caudal Q , mientras que es inversamente proporcional a la cuarta potencia del diámetro interno del canal. En un flujo impulsado por una diferencia de columna de líquido h , la caída de presión puede ser calculada considerando la presión hidrostática generada por la columna de líquido $h = -\frac{\Delta p}{\rho g}$ [3]. Reescribiendo la Ec. (2) obtenemos finalmente la columna de líquido

$$h = \frac{8 \mu L Q}{\rho g \pi R^4}. \quad (3)$$

Los caudales volumétricos se calculan como

$$Q = \frac{m}{\rho t}, \quad (4)$$

donde ρ es la densidad del agua [4] y t el lapso durante el cual se acumula la masa de agua m .

En el presente trabajo se busca verificar experimentalmente este resultado analítico para tubos de diámetro pequeño. Como fluido de trabajo se utilizará agua destilada por estar perfectamente caracterizada y ser de fácil y segura manipulación.

Método experimental

El trabajo consistió en medir el caudal circulante por diferentes tubos al aplicarles una diferencia de presión constante. En el dispositivo experimental utilizado la diferencia de presión se obtiene mediante una columna de agua, es decir, descargando agua desde un depósito superior, elevado respecto de un depósito inferior. Los tubos utilizados son de acero inoxidable y sus dimensiones se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Dimensiones internas de los tubos estudiados

	Diámetro interno [mm]	Longitud [mm]
Tubo 1	0,200±0,013	199,5±1,0
Tubo 2	0,300±0,013	199,0±1,0
Tubo 3	0,500±0,013	200,5±1,0

El dispositivo experimental se muestra en la Figura 1. Tanto el depósito como el recipiente recolector son suficientemente grandes como para que la variación de nivel de líquido durante la medición no sea significativa en comparación con la altura total de la columna de agua, indicada como h en la Figura 1. La medición de caudal se realizó pesando el vaso recolector al comienzo y al final de cada realización, y midiendo el tiempo correspondiente a la misma. Durante todas las mediciones se mantuvo el extremo del tubo sumergido en el agua del vaso recolector para evitar efectos de tensión superficial. Para iniciar y concluir cada medición se utilizó la válvula esférica mostrada en la Figura 1. El peso se midió con una balanza electrónica HARR-12hg con una precisión de 0,01 g. El tiempo de recolección se varió de forma tal de obtener como máximo un acumulado de 1 g pero en ningún caso se tomaron tiempos mayores a 5 minutos. La duración de cada medición se controló mediante un cronómetro manual. Este procedimiento introduce un error máximo estimado de 0,5 s para los tiempos utilizados, que es el tiempo necesario para cerrar la válvula esférica. La altura de columna de agua se varió entre 50 y 250 mm y se midió mediante una regla metálica con una precisión de 1 mm. La manguera utilizada en el dispositivo posee un diámetro interior suficientemente grande para que la caída de presión a lo largo de la misma sea despreciable.

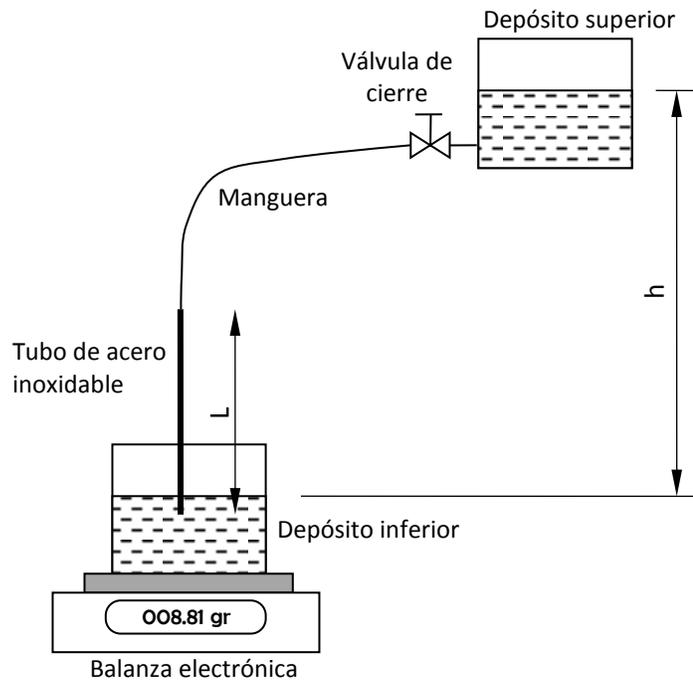


Figura 1. Esquema del dispositivo experimental

Resultados

Las primeras mediciones se realizaron con el tubo número 1. Los resultados se muestran en la Figura 2 junto a una recta de ajuste obtenida por regresión lineal. Si bien la ordenada al origen no es idénticamente cero, su valor es razonablemente pequeño y para los posteriores cálculos se descarta, utilizando solo el valor de la pendiente. Se puede ver que la recta ajusta los datos dentro de las bandas de error, verificando el comportamiento indicado por la Ec. (2). Los cálculos de error pueden ser encontrados en el Apéndice.

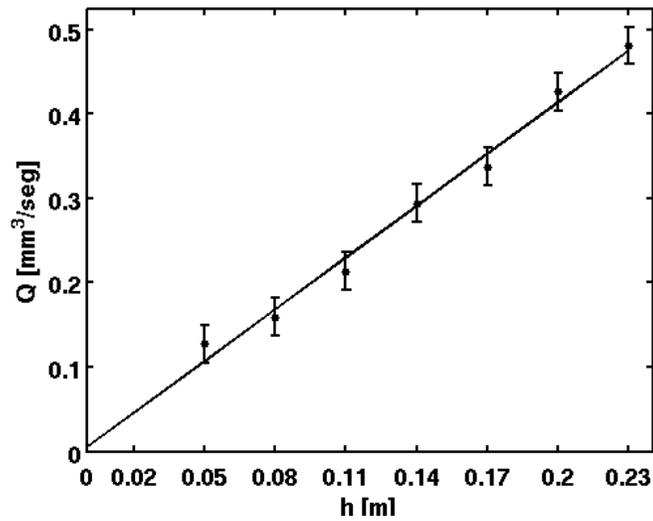


Figura 2. Caudal en función de la caída de presión en el tubo número 1.

Los resultados para los tubos números 2 y 3 se muestran en la Figura 3 y en la Figura 4 respectivamente. En todos los casos se observa un comportamiento lineal dentro del error de las mediciones.

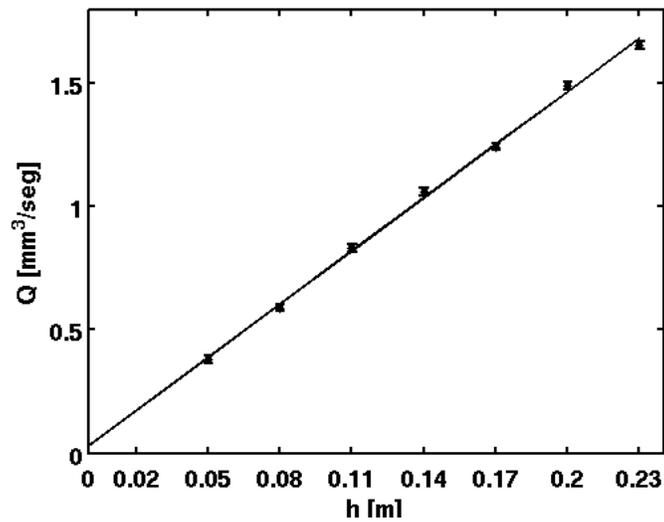


Figura 3. Caudal en función de la caída de presión en el tubo número 2.

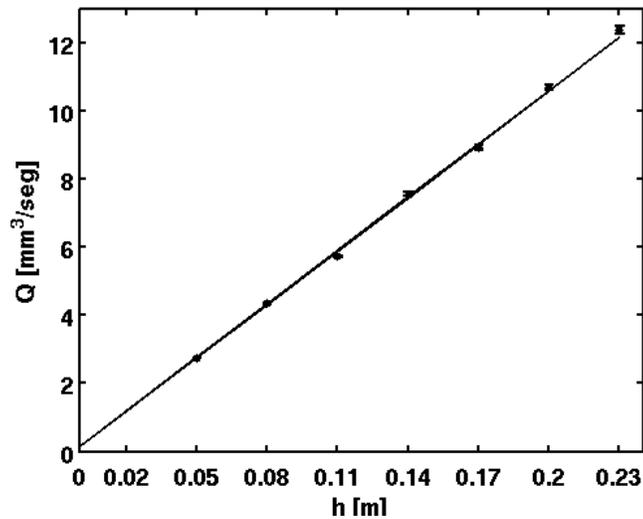


Figura 4. Caudal en función de la caída de presión en el tubo número 3.

A partir de las mediciones realizadas se puede estimar la viscosidad del agua según el modelo teórico expresado por la Ec. (3). Reacomodando la Ec. (3) en función de las pendientes de ajuste $A = \Delta Q/\Delta h$ se obtiene:

$$\mu = \frac{\rho g \pi D^4}{128 AL} \cdot A \quad (5)$$

Para obtener un valor de referencia de la viscosidad y densidad del agua se supuso todo el sistema en equilibrio térmico a temperatura ambiente. La temperatura ambiente durante el experimento se mantuvo a (20 ± 1) °C. Según material de referencia, la densidad del agua a dicha temperatura es de 998 kg/m^3 [4]. Los resultados obtenidos con las respectivas mediciones se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. Resumen de mediciones obtenidas y viscosidad del agua calculada según Ec. (3) para los diferentes tubos.

Diámetro [mm]	Pendiente de ajuste A [$10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$]	μ [10^{-3} N.s/m^2]	Re (mínimo)	Re (máximo)
0,2	$2,0461 \pm 0,0003$	$0,939 \pm 0,016$	0,0006	0,0026
0,3	$7,1893 \pm 0,0002$	$1,352 \pm 0,015$	0,0013	0,0061
0,5	$52,3169 \pm 0,0002$	$1,434 \pm 0,010$	0,0057	0,0262

Se puede observar que si bien los valores de viscosidad obtenidos son cercanos en todos los casos, no son coincidentes dentro del error. Se repitieron las mediciones para descartar errores en la metodología sin observar diferencias relevantes. Una posible fuente de error es el diámetro interno de los tubos. Este diámetro no pudo ser medido y su valor se obtuvo de las especificaciones del proveedor, MacMaster-Carr [5]. Nótese que el diámetro interno de los tubos se presenta en la Ec. (5) elevado al exponente 4, con lo cual el cálculo de la viscosidad del agua es particularmente sensible a este valor.

En la Tabla 2 se muestran también los valores de Número de Reynolds (Ec. (1)) calculados con la viscosidad dinámica y densidad de referencia. Se puede observar que todos los valores son mucho menores al valor de transición de flujo laminar a turbulento, aproximadamente 2300, con lo cual la hipótesis de flujo laminar se encuentra suficientemente justificada [6].

Conclusiones

Se realizaron mediciones de caudal de un flujo que circula por un tubo bajo varias diferencias de presión. En todo el rango de condiciones estudiadas se verificó la relación lineal entre el caudal medido y la diferencia de presiones aplicada, lo cual confirma que el flujo es de inercia despreciable. Esto se condice también con los bajos números de Reynolds calculados para cada uno de los casos.

Con las mediciones obtenidas se calculó el valor de viscosidad del agua. La principal fuente de incertidumbre es el valor del diámetro interno de los tubos utilizados. Los valores obtenidos para cada caso no son coincidentes dentro del error por lo cual existe una fuente de error adicional a los considerados en el cálculo. La mejor estimación de la viscosidad es entonces $(1,2 \pm 0,3) \text{ N.s/m}^2$, donde el error adoptado es la mitad del rango de valores obtenidos. Este valor contiene al valor de referencia $1,003 \times 10^{-3} \text{ N.s/m}^2$ [4], verificando la aplicabilidad del modelo de flujo laminar para los casos estudiados.

Agradecimientos

El/los autores quieren expresar su agradecimiento a los técnicos Diego Roth y Lars González del Laboratorio 1 del Instituto Balseiro por su colaboración en la modificación del dispositivo experimental un viernes a las 17:10 de la tarde.

Referencias

- [1] White, F.M., 1999, "Fluid Mechanics, Fourth Edition," WCB/McGraw-Hill, pp.24-25.
- [2] White, F.M., 1999, "Fluid Mechanics, Fourth Edition," WCB/McGraw-Hill, pp.341-342.
- [3] White, F.M., 1999, "Fluid Mechanics, Fourth Edition," WCB/McGraw-Hill, pp.339.
- [4] Callie Hull, 1933, "International critical tables of numerical data, physics, chemistry and technology." National Research Council.
- [5] MacMaster-Carr, accedido: 09/07/2014 13:30, Catálogo electrónico: "Precision Miniature Stainless Steel Tubing", <http://www.mcmaster.com/#standard-metal-tubing/=srhjjz>.
- [6] White, F.M., 1999, "Fluid Mechanics, Fourth Edition," WCB/McGraw-Hill, pp.328.

Apéndice

A continuación se presentan las ecuaciones utilizadas para los cálculos de error, que son obtenidas por propagación de errores. Para el cálculo de caudal, linealizando la Ec. (4) obtenemos:

$$\delta Q = \frac{1}{\rho} \sqrt{\left(\frac{m}{t^2} \delta t\right)^2 + \left(\frac{1}{t} \delta m\right)^2}.$$

Cabe aclarar que consideramos aquí despreciable el error en el valor de la densidad ρ . Calculando el error relativo obtenemos:

$$\frac{\delta Q}{Q} = \frac{\rho t}{m} \frac{1}{\rho} \sqrt{\left(\frac{m}{t^2} \delta t\right)^2 + \left(\frac{1}{t} \delta m\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\delta t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\delta m}{m}\right)^2}.$$

En forma equivalente para la Ec. (5) tenemos:

$$\delta \mu = C \sqrt{\left(\frac{4D^3}{AL} \delta D\right)^2 + \left(\frac{D^4}{A^2L} \delta A\right)^2 + \left(\frac{D^4}{AL^2} \delta L\right)^2},$$

donde $C = \frac{\rho g \pi}{128}$ es una constante en cuyo cálculo el único valor empírico es ρ , cuyo error es despreciable. Finalmente el error relativo del cálculo de la viscosidad cinemática resulta:

$$\frac{\delta \mu}{\mu} = \sqrt{\left(4 \frac{\delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{L}\right)^2}.$$