Valorando tus dudas

Gabriel Meyer

e-mail: gmeyer@cab.cnea.gov.ar

Resumen

Clasificación de errores en mediciones: sistemáticos y casuales

Presentación de errores: x.xxx ± δx

- δx con una cifra significativa (salvo 1)
- errores relativos

Graficando valores medidos

- Una variable: sobre un eje, histograma
- Dos variables: buscando una relación lineal si existe de manera simple

Combinando errores: caso general

$Z = x \pm y$

$Z = (x_m \pm y_m) \pm (\delta x + \delta y]$

$$z = \frac{a.b.c}{d.e.f}$$

$$\frac{\delta z}{z} = \frac{\delta a}{a_m} + \frac{\delta b}{b_m} + \frac{\delta c}{c_m} + \frac{\delta d}{d_m} + \frac{\delta e}{e_m} + \frac{\delta f}{f_m}$$

Resumen

Combinando errores: caso de variables independientes

$$Z = Z(w_m, x_m, y_m)$$

$$\delta z = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial w}\right|_{w_m, x_m, y_m} .\delta w\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{w_m, x_m, y_m} .\delta x\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{w_m, x_m, y_m} .\delta y\right)^2}$$

Permite el análisis de qué instrumento conviene utilizar para medir cada variable

Tratamiento de las mediciones: n mediciones $\{x_i\}$ de la variable x

- **Calificadores: promedio, varianza, desvío estándar**
- **Dispersión típica de una medición: $x_i \pm \sigma$**
- **Valor a informar:**

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - nX^2\right)}$$

$$X \pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Ajustes de resultados

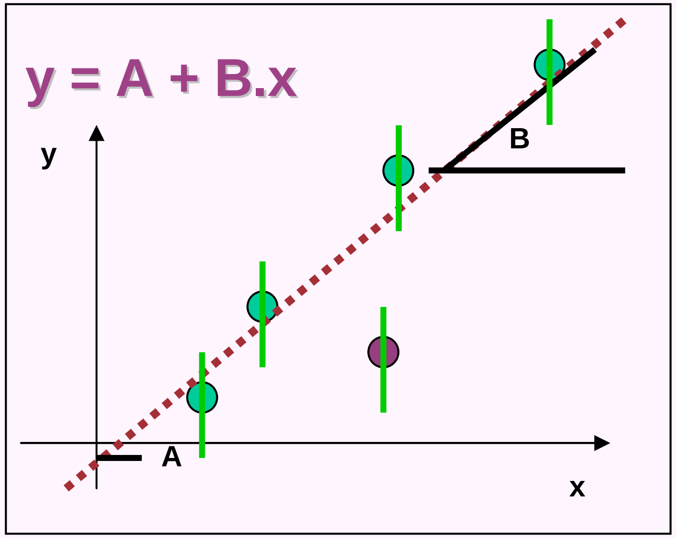
El caso de ajustes de puntos que están sobre una recta

Consideraciones:

- **A,B obtenidos deben tener sentido físico**
- **la recta debe ajustar todos los puntos considerados dentro del margen de error**
- **para identificar si los puntos medidos responden a un comportamiento lineal definimos:**

r: coeficiente de correlación

σ_{xy}: covarianza



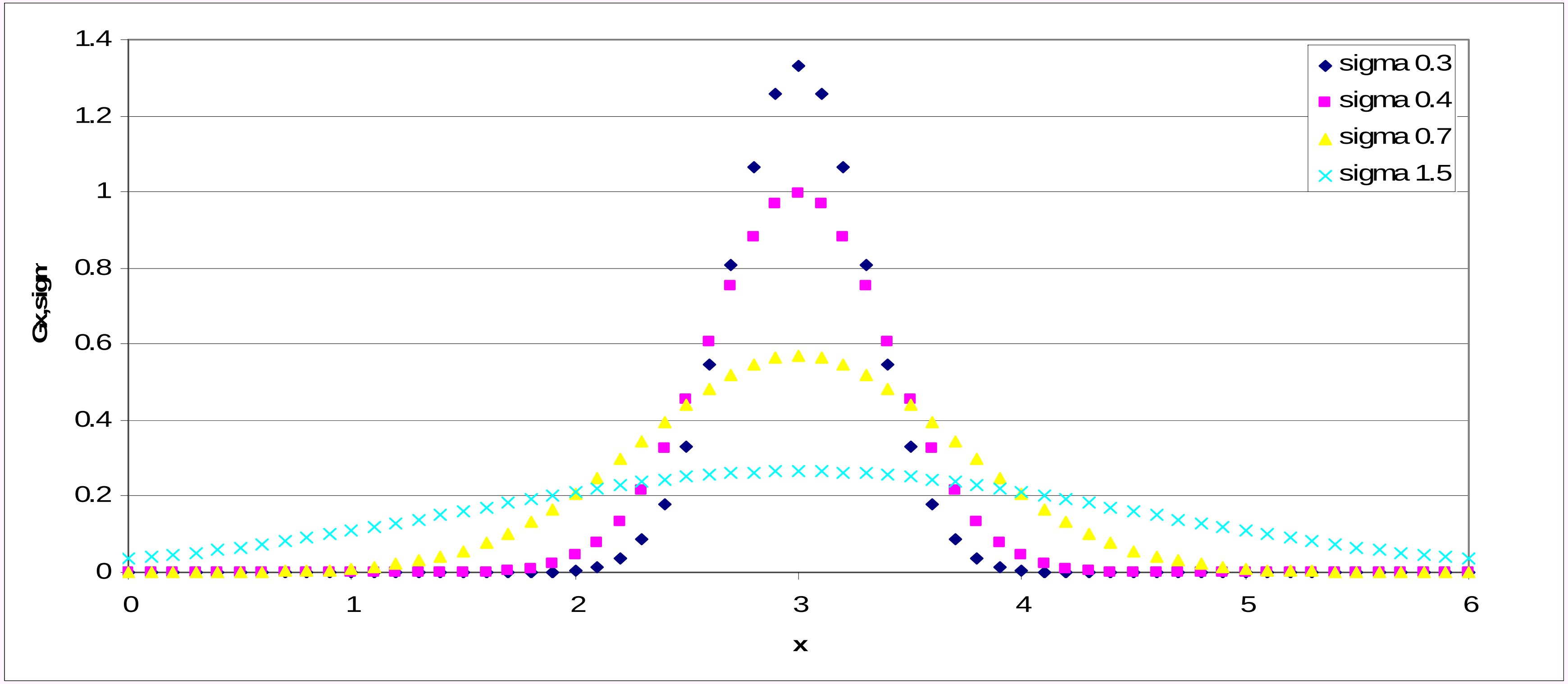
$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_y}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta x_i . \delta y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - X).(y_i - Y)$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta x_i . \delta y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta x_i^{\,2} \sum_{i=1}^{n} \delta y_i^{\,2}}}$$

Función de distribución de Gauss

Significado de σ



$$prob(X-\sigma, X+\sigma) = \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} G(x).dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}.dx = 0.68$$

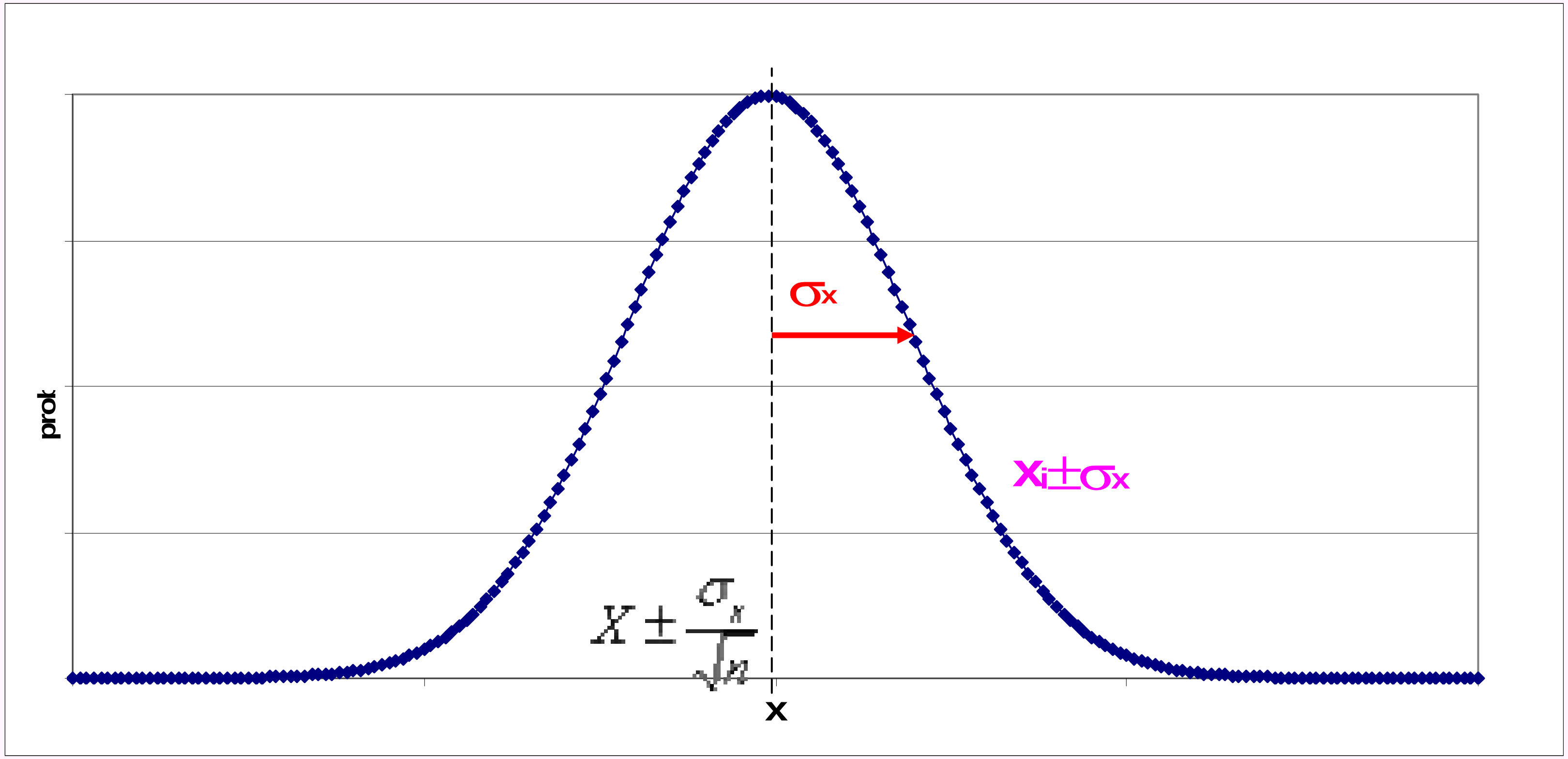
$$prob(X-2\sigma, X+2\sigma) = 0.954$$

$$prob(X-3\sigma, X+3\sigma) = 0.997$$

Función de distribución de Gauss

Encontrando X y σ cuando medimos $\{x_i\}$

X y σ son límites cuando n → ∞



$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - nX^2\right)}$$

$$X \pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Funciones de distribución de probabilidad

Principio de máxima verosimilitud

- Dado un experimento que nos provee de datos $\{x_i\}$
- Dada una distribución de probabilidad de obtener datos que depende de parámetros $\{P_i\}$, $Prob(x_i) = F_{P1,P2,etc}$
- El mejor estimación para cada uno de los parámetros $\{P_i\}$ es aquel valor que me permite maximizar la probabilidad de haber encontrado dichos valores $\{x_i\}$

$$prob(x_1, x_2, .., x_n) = prob(x_1).prob(x_2)....prob(x_n) = F(x_1;\{P_i\}).F(x_2;\{P_i\})...F(x_n;\{P_i\})$$

Funciones de distribución de probabilidad

Principio de máxima verosimilitud: aplicación

- Dado un experimento que nos provee de datos $\{x_i\}$
- Supongamos que la distribución de las mediciones tiene una forma como la sugerida por la distribución normal
- Aplicamos el PMV para calcular X de la distribución

$$prob(x_1, x_2, ..., x_n) = prob(x_1).prob(x_2)...prob(x_n)$$

$$prob(x_1) = G_{X,\sigma}(x_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_1-X)^2/2\sigma^2}$$

$$prob(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_1-X)^2/2\sigma^2} . \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_2-X)^2/2\sigma^2} .... \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_n-X)^2/2\sigma^2}$$

$$prob(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n .e^{-(x_1-X)^2/2\sigma^2 - ....--(x_n-X)^2/2\sigma^2}$$

$$prob(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n .e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-X)^2/2\sigma^2}$$

Funciones de distribución de probabilidad

Principio de máxima verosimilitud:

$$prob(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n . e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i - X)^2 / 2\sigma^2}$$

El mejor estimador de X es aquel que maximice la probabilidad de haber medido $\{x_i\}$

prob(x_1,x_2,…,x_n) es máxima si:

$$\min \sum_{i=1}^{n} (x_i - X)^2 / 2\sigma^2$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \sum_{i=1}^{n} (x_i - X)^2 / 2\sigma^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - X) = 0$$

$$X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Funciones de distribución de probabilidad

Principio de máxima verosimilitud: aplicación a promedios pesados

- Dadas dos mediciones de un experimento que nos provee los siguientes datos: $x_1 \pm \delta x_1$ $x_2 \pm \delta x_2$, con $\delta x_1 \neq \delta x_2$
- Apliquemos el PMV a esta situación

$$prob(x_1, x_2) = prob(x_1).prob(x_2)$$

$$prob(x_1) = G_{X,\sigma}(x_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_1 - X)^2/2\sigma^2}$$

$$prob(x_1, x_2) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-(x_1 - X)^2/2\sigma_1^2} . \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-(x_2 - X)^2/2\sigma_2^2}$$

$$prob(x_1, x_2) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2 2\pi} .e^{-(x_1 - X)^2/2\sigma_1^2 - (x_2 - X)^2/2\sigma_2^2}$$

Funciones de distribución de probabilidad

Principio de máxima verosimilitud: aplicación a promedios pesados

$$prob(x_1, x_2) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2 2\pi} . e^{-(x_1 - X)^2/2\sigma_1^2 - (x_2 - X)^2/2\sigma_2^2}$$

El mejor estimador de X es aquel que maximice la probabilidad de haber medido $\{x_{1,2}\}$

$prob(x_1,x_2)$ es máxima si:

$$\min\left((x_1 - X)^2/2\sigma_1^2 + (x_2 - X)^2/2\sigma_2^2 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\left((x_1 - X)^2/2\sigma_1^2 + (x_2 - X)^2/2\sigma_2^2 \right) = 0$$

$$X = \frac{1}{w_1 + w_2}(w_1 x_1 + w_2 x_2)$$

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$\boxed{X = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \qquad w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Funciones de distribución de probabilidad

Principio de máxima verosimilitud: aplicación a la regresión lineal

- Dadas mediciones de un experimento que nos provee pares $\{x_i,y_i\}$ de valores donde <u>x</u> tiene error nulo o mucho menor a <u>y</u>, y los errores de todos los <u>y</u> son similares
- Se supone que <u>x</u> y <u>y</u> se relacionan según: y = A + B.x
- Apliquemos el PMV a esta situación

Dado x_i, el valor “verdadero” de y_i es:

Verd $y_i = A + B.x_i$

La probabilidad de haber medido todos los pares $\{x_i,y_i\}$ es:

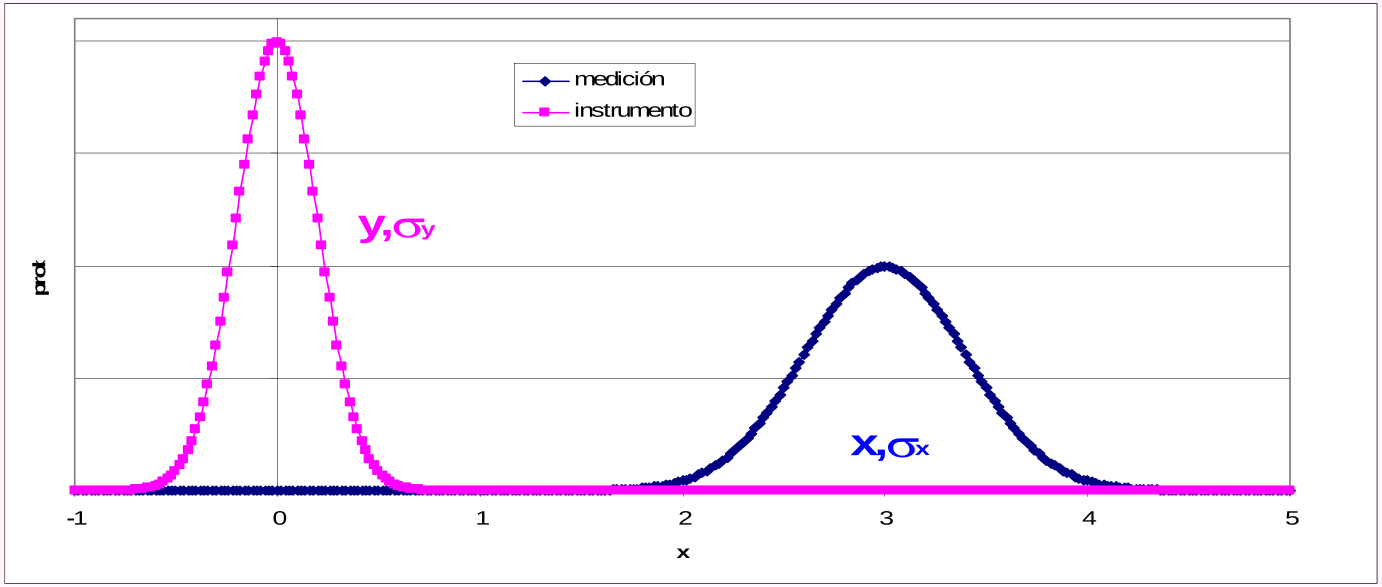
$$prob(y_1, y_2,....y_n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y_1-A-Bx_1)^2/2\sigma^2} ..... \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y_n-A-Bx_n)^2/2\sigma^2}$$

$$prob(y_1, y_2,....y_n) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n .e^{-\sum_{i=1}^{n}(y_i-A-Bx_i)^2/2\sigma^2}$$

$$\max prob(y_1, y_2,....y_n) \rightarrow \min \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{2\sigma^2} = \min \sum_{i=1}^{n} (y_i - A - Bx_i)^2$$

Funciones de distribución de probabilidad

El caso del error instrumental y el error de medición



- Utilizamos un instrumento cuyo fabricante nos informa que posee un error asociado $\pm\delta y$, que suponemos se refiere al error casual que posee por su fabricación. Este dato del instrumento lo podemos informar como $y \pm \delta y$

- Realizamos mediciones con dicho instrumento, obtenemos el valor de medición x y calculamos la componente de error proveniente de factores aleatorios utilizando la estadística previa, estimamos ese error en $\pm \delta x$. El valor medido entonces es $x \pm \delta x$.

- El valor que queremos informar es: $z = x + y$

Funciones de distribución de probabilidad

El caso del error instrumental y el error de medición

$$prob(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/2\sigma_x^2}$$

$$prob(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-(y-Y)^2/2\sigma_y^2}$$

$$prob(x,y) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/2\sigma_x^2} e^{-(y-Y)^2/2\sigma_y^2}$$

$$z = x + y \rightarrow y = z - x$$

$$prob(z = x + y) = \int_{-\infty}^{+\infty} prob(x).prob(y = z - x).dx$$

$$prob(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/2\sigma_x^2} e^{-(z-x-Y)^2/2\sigma_y^2}.dx$$

$$\boxed{prob(z) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\frac{(x-X)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(z-x-Y)^2}{2\sigma_y^2}\right]} dx}$$

Funciones de distribución de probabilidad

El caso del error instrumental y el error de medición

$$prob(z) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\frac{(x-X)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(z-x-Y)^2}{2\sigma_y^2}\right]} dx$$

$$prob(z) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}.\left[\frac{(z-X-Y)^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}+\frac{(\sigma_y^2.x-\sigma_x^2.(z-x-Y))^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}\right]} dx = e^{-\frac{1}{2}.\left[\frac{(z-X-Y)^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right]}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}.\left[\frac{(\sigma_y^2.x-\sigma_x^2.(z-x-Y))^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}\right]} dx$$

$$prob(z) \propto e^{-\frac{1}{2}.\left[\frac{(z-X-Y)^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right]}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}.\left[\frac{(x-\sigma_x^2\sigma_y^{-2}(z-x-Y))^2}{\sigma_x^2\sigma_y^{-2}(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}\right]} dx = e^{-\frac{1}{2}.\left[\frac{(z-X-Y)^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right]}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}.\left[\frac{(x-A)^2}{\sigma_x^2\sigma_y^{-2}(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}\right]} dx$$

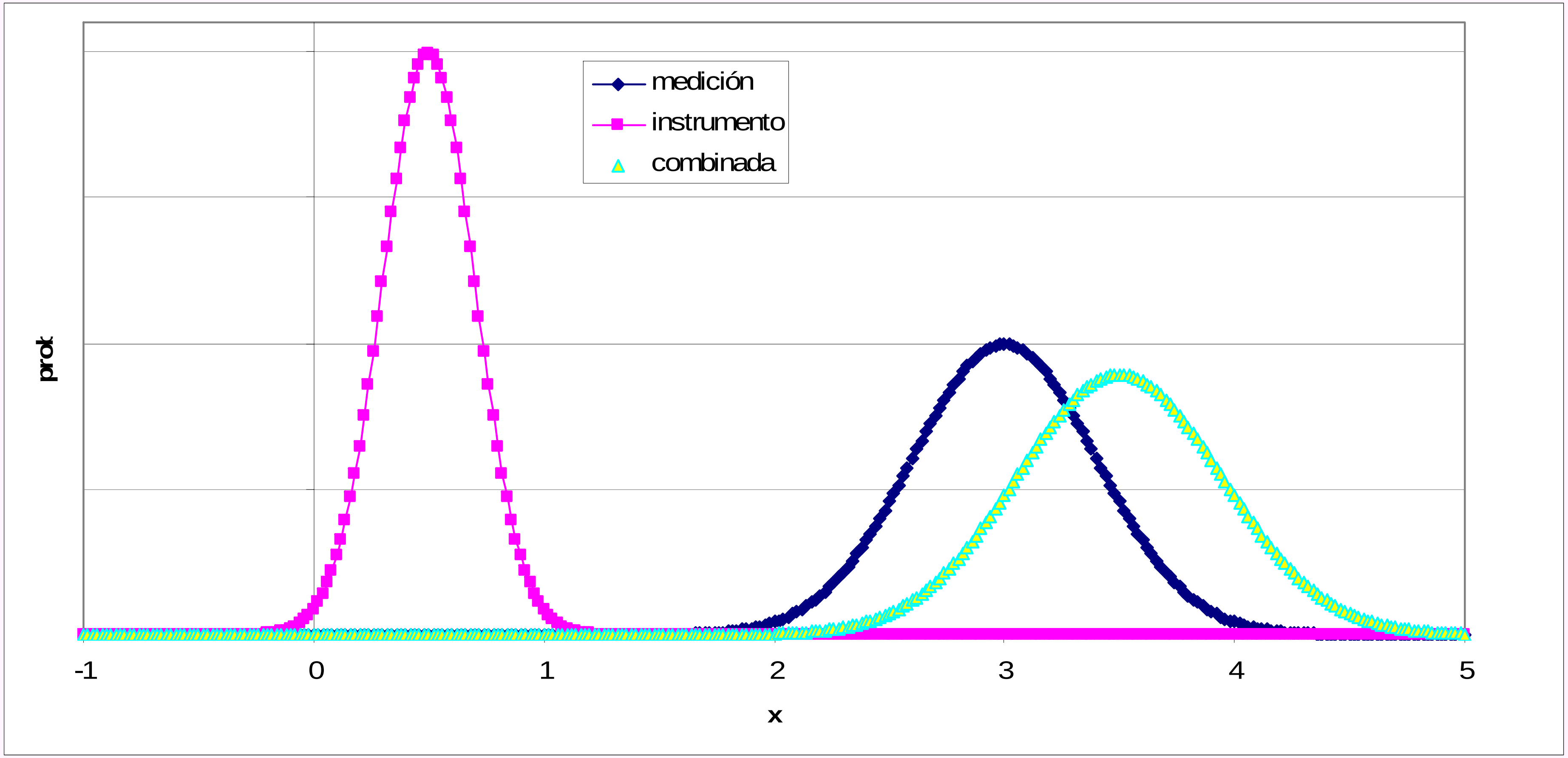
$$prob(z) \propto e^{-\frac{1}{2}.\left[\frac{(z-X-Y)^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right]}.F(\sigma_x^2,\sigma_y^2) \propto e^{-\frac{1}{2}.\left[\frac{(z-X-Y)^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right]}$$

Funciones de distribución de probabilidad

El caso del error instrumental y el error de medición

$$prob(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(z-X-Y)^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right]}$$

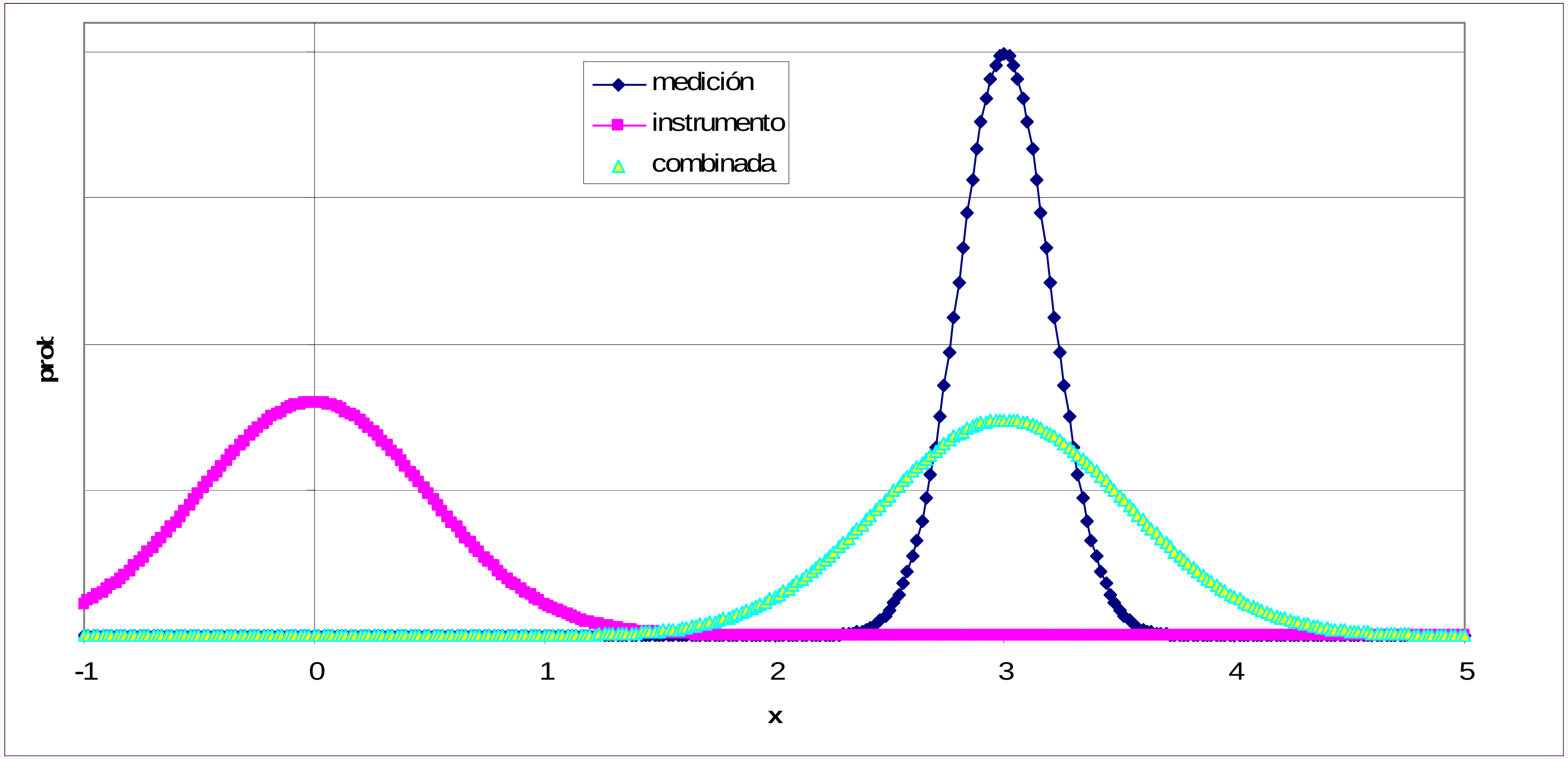
$$\delta z = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_X^2} = \sqrt{\sigma_y^2 + \frac{\sigma_x^2}{n}}$$



Funciones de distribución de probabilidad

El caso del error instrumental y el error de medición

$$prob(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(z-X-Y)^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right]}$$



Midiendo muchas veces podremos utilizar el promedio y su error y reducir el error de medición, no el del instrumento

Covarianza

Habíamos calculado el error de una función z de las variables independientes x,y y obtenido:

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y}\right)^2 .\sigma_x^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y}\right)^2 .\sigma_y^2}$$

Cómo realizamos el cálculo cuando x,y no son independientes?

$$\delta z_i = \left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} \delta x_i + \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \delta y_i$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\delta z_i)^2 = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} \delta x_i + \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \delta y_i\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} \delta x_i\right)^2 + \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \delta y_i\right)^2 + \frac{2}{n}.\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} .\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} .\delta x_i.\delta y_i\right) =$$

$$= \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y}\right)^2 .\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(\delta x_i)^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y}\right)^2 .\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(\delta y_i)^2 + \left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} .\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} .\frac{2}{n}.\sum_{i=1}^{n}(\delta x_i.\delta y_i) =$$

$$= \sigma_z^2 = \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y}\right)^2 .\sigma_x^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y}\right)^2 .\sigma_y^2 + 2\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} .\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \sigma_{xy}$$

Covarianza

Cómo realizamos el cálculo cuando x,y no son independientes?

$$\sigma_z^2 = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y}\right)^2 .\sigma_x^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y}\right)^2 .\sigma_y^2 + 2\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y} .\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y} \sigma_{xy}}$$

Ejemplos de la influencia de la covarianza: z=x.y (cuando x=y, $z=x^2$)

- **si nos damos cuenta que x=y → $z = x^2$ → $\delta z = 2.x.\delta x$**
- **si pensamos que x ≠ y, y que son independientes:**

$$\delta z = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{X,Y}\right)^2 .\sigma_x^2 + \left(\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{X,Y}\right)^2 .\sigma_y^2} = \sqrt{(y.\delta x)^2 + (x\delta y)^2} = \sqrt{2(x\delta x)^2} = \sqrt{2}.x\delta x$$

- **si tenemos en cuenta la covarianza:**

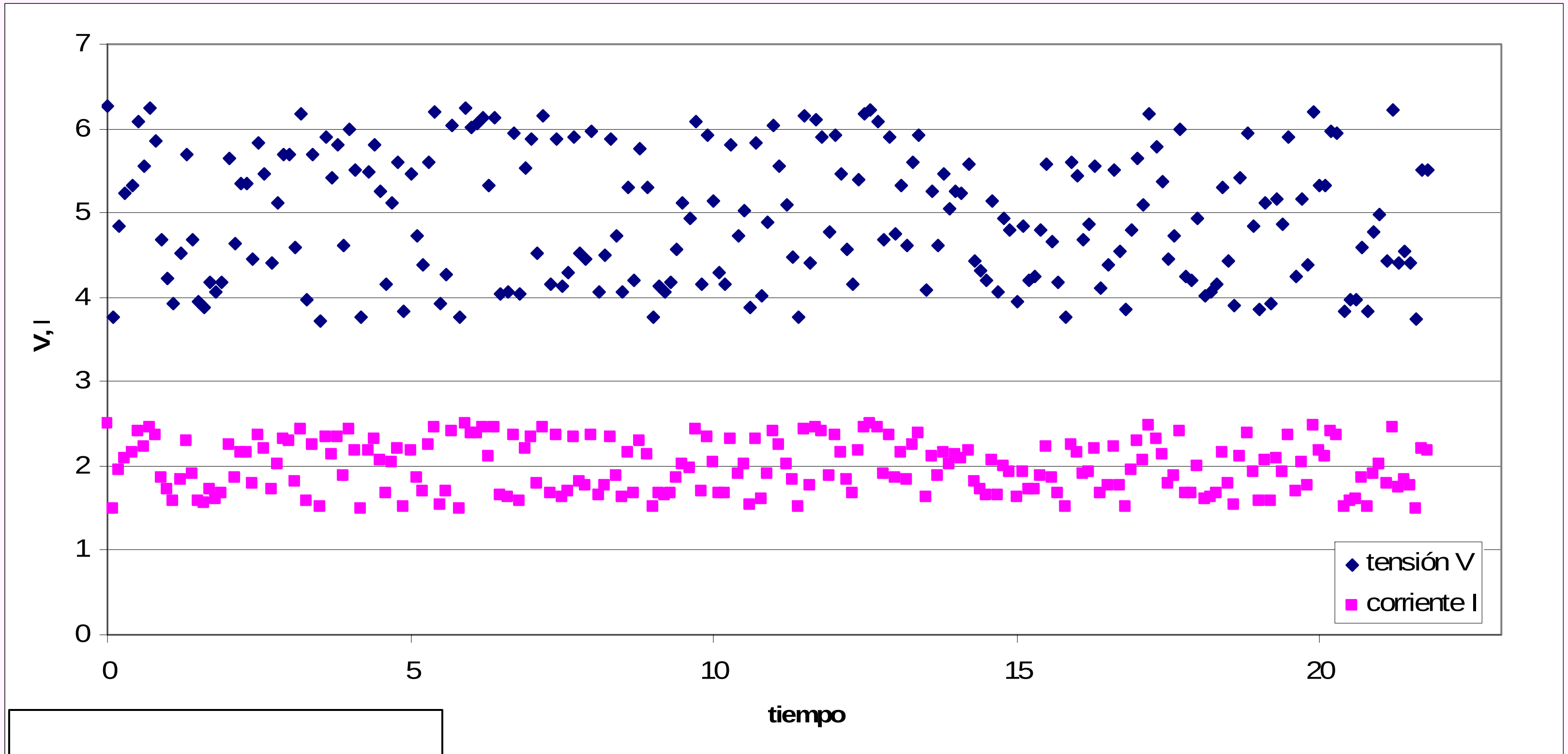
$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta x_i.\delta y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - X).(y_i - Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - X)^2 = \sigma_x^2$$

$$\sigma_z = \sqrt{(y.\sigma_x)^2 + (x\sigma_y)^2 + 2xy\sigma_x^2} = \sqrt{x^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_x^2 + 2x^2\sigma_x^2} = 2x\sigma_x$$

$$\delta z = 2.x.\delta x$$

Covarianza

Ejemplo: R = V/I



$$V = 4.96 \pm 0.06$$

$$\sigma_V = 0.8$$

$$I = 1.99 \pm 0.02$$

$$\sigma_I = 0.3$$

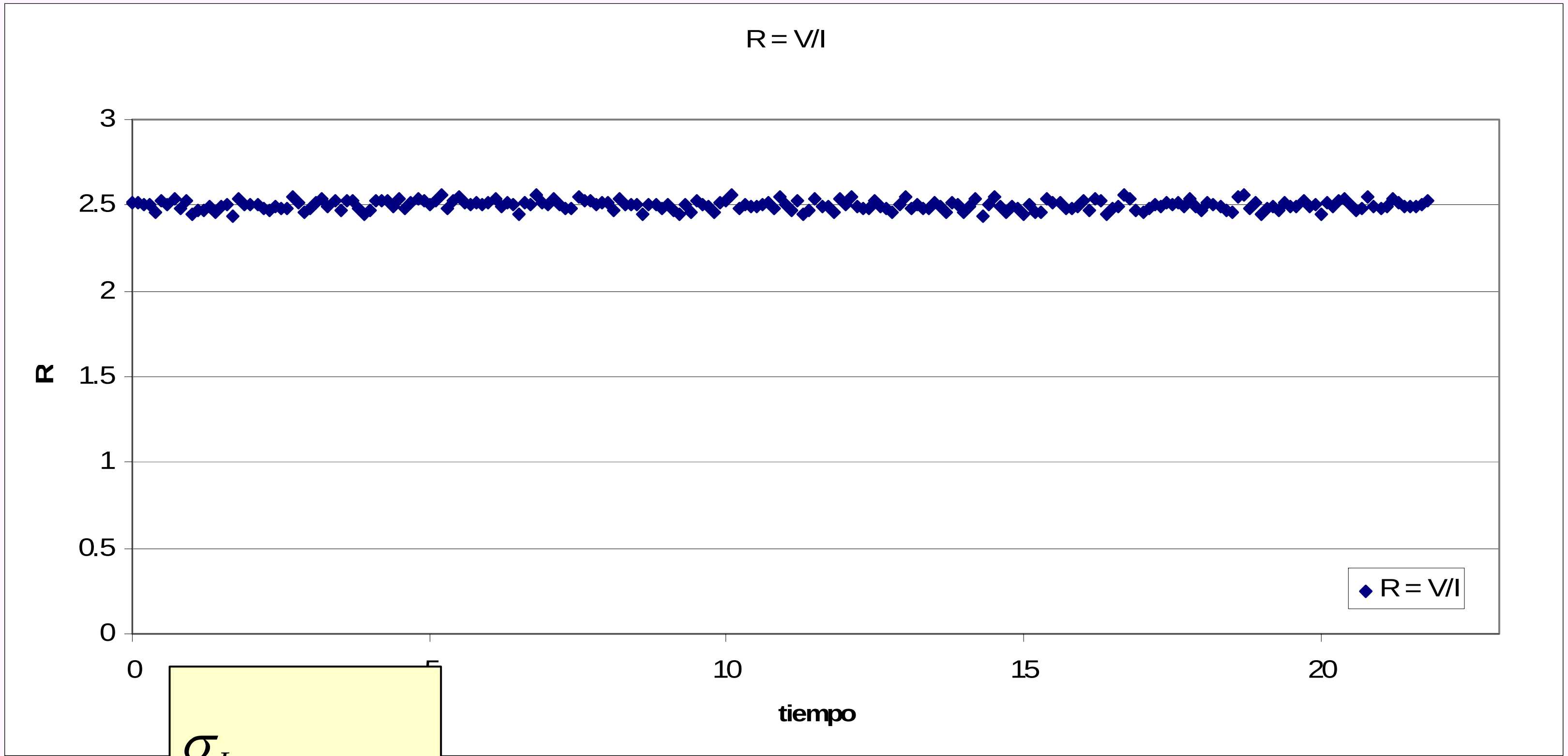
I,V independientes

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{I}\right)^2 + \left(-\frac{V.\sigma_I}{I^2}\right)^2} = 0.6$$

$$R = 2.50 \pm 0.04$$

Covarianza

Ejemplo: R = V/I



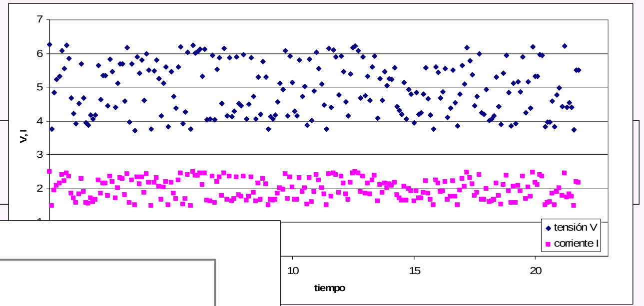
$$\frac{\sigma_I}{I} = 15.3\%$$

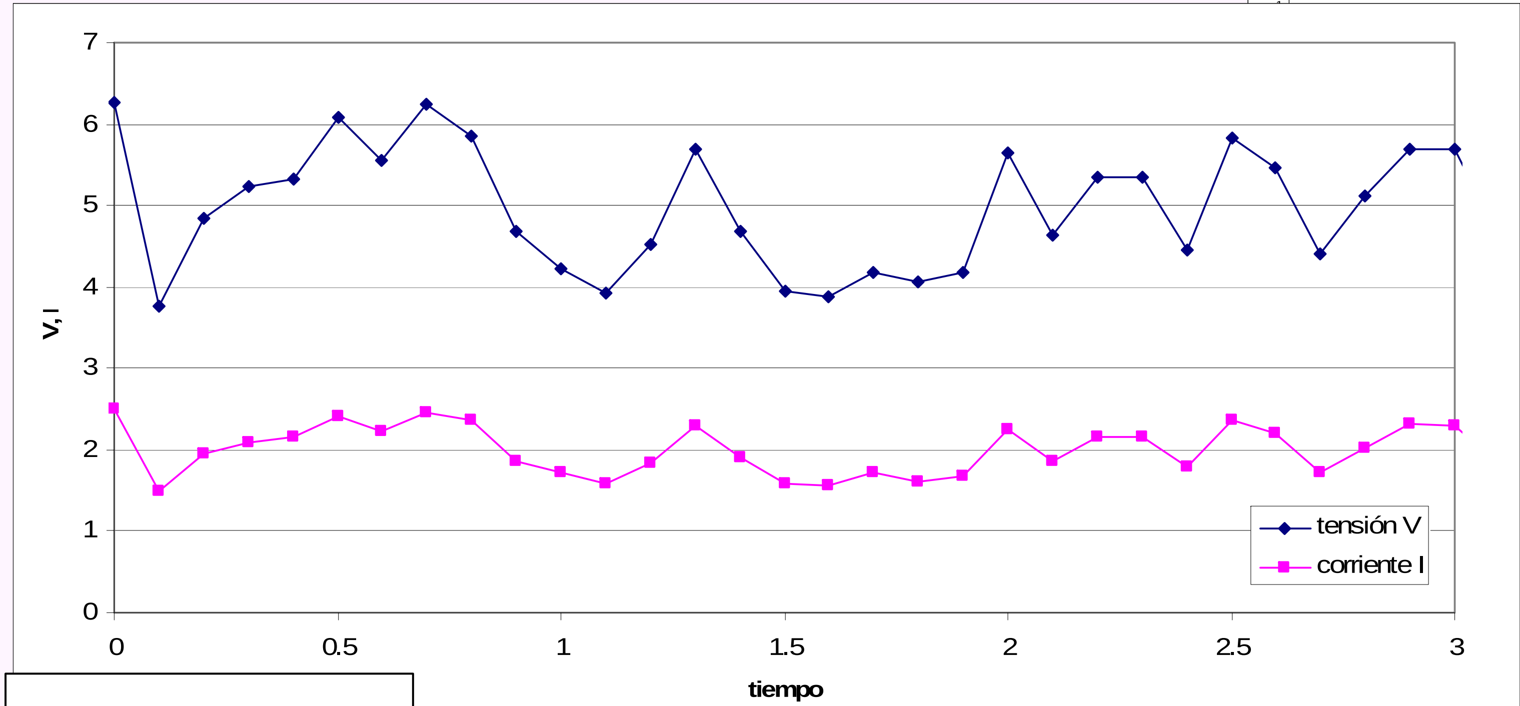
$$\frac{\sigma_V}{V} = 15.4\%$$

$$\frac{\sigma_R}{R} = 1.1\%$$

Covarianza

Ejemplo: R = V/I





$$V = 4.96 \pm 0.06$$
$$\sigma_V = 0.8$$
$$I = 1.99 \pm 0.02$$
$$\sigma_I = 0.3$$
$$\sigma_{xy} = 0.23$$

Considerando covarianza

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_v}{I}\right)^2 + \left(-\frac{V.\sigma_I}{I^2}\right)^2 - 2\frac{V}{I^3}\sigma_{xy}} = 0.05$$

$$R = 2.500 \pm 0.004$$

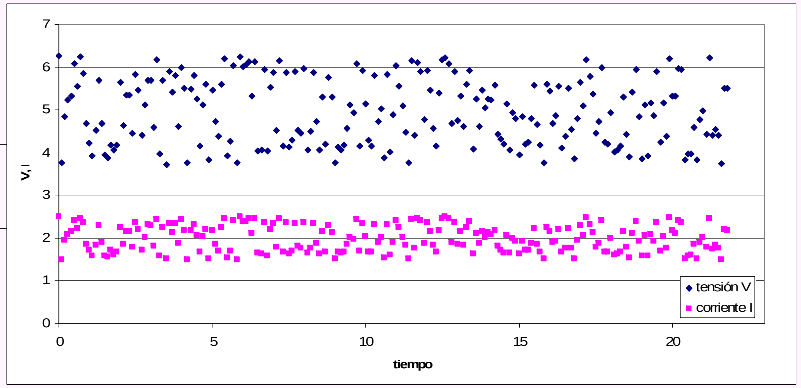
I,V independientes

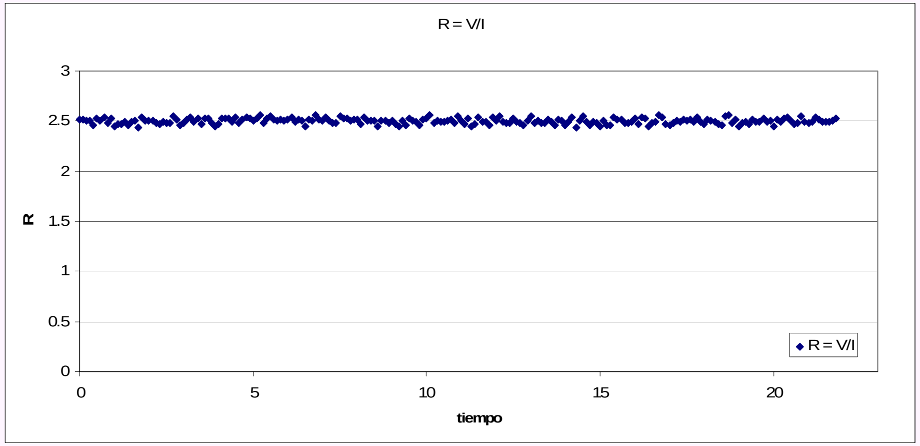
$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{I}\right)^2 + \left(-\frac{V.\sigma_I}{I^2}\right)^2} = 0.6$$

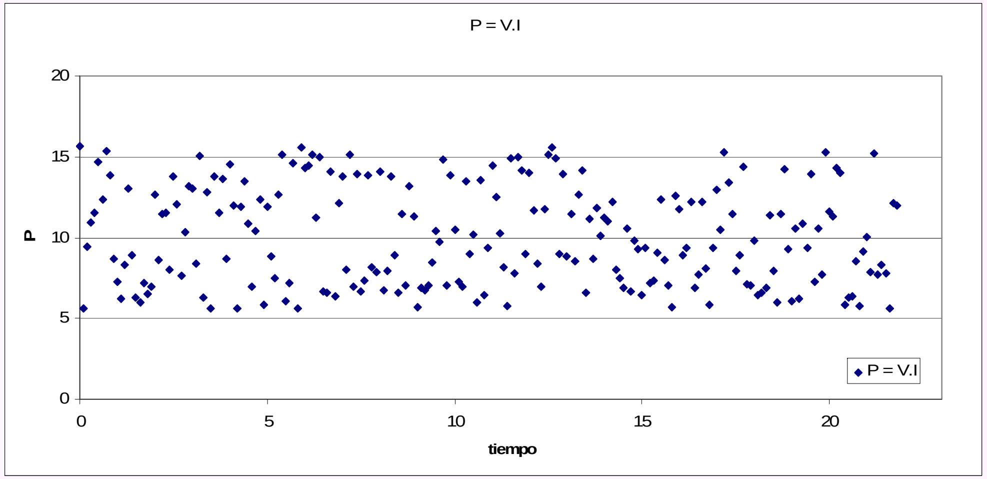
$$R = 2.50 \pm 0.04$$

Covarianza

Ejemplo: P = V.I vs R = V/I







$$V = 4.96 \pm 0.06$$
$$\sigma_V = 0.8$$
$$I = 1.99 \pm 0.02$$
$$\sigma_I = 0.3$$
$$\sigma_{xy} = 0.23$$

Considerando covarianza

$$\sigma_R = 0.05 \qquad R = 2.500 \pm 0.004$$

$$\sigma_P = 3 \qquad P = 10.1 \pm 0.2$$

I,V independientes

$$\sigma_R = 0.6 \qquad R = 2.50 \pm 0.04$$

$$\sigma_P = 2.1 \qquad P = 10.10 \pm 0.15$$

Otras distribuciones: Poisson

Es la función de distribución que se asocia a aquellos eventos que pueden ocurrir de manera aleatoria, pero con una tasa de ocurrencia que no cambia con el momento que la mida

Ejemplos:

- **emisión de ceniza de un volcán**
- **número de partículas emitidas por una cantidad importante de materia radiactiva**
- **cantidad de autos que cruzan una dada esquina**
- **cantidad de lamparitas que se queman en una ciudad**

Propiedades:

- **la probabilidad de ocurrencia está definida sólo para números (en general enteros positivos)**
- **dado un evento que ocurre con una frecuencia *f* y se quiere saber cual es la probabilidad que ocurran *n* eventos en un tiempo *t*, la probabilidad es:**

$$P(n;t) = \frac{e^{-ft}.(ft)^n}{n!}$$

$$P(n;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^n}{n!}$$

$$\lambda = f.t$$

$\longrightarrow$

Promedio:	λ
Varianza:	λ

Otras distribuciones: Poisson

Características:

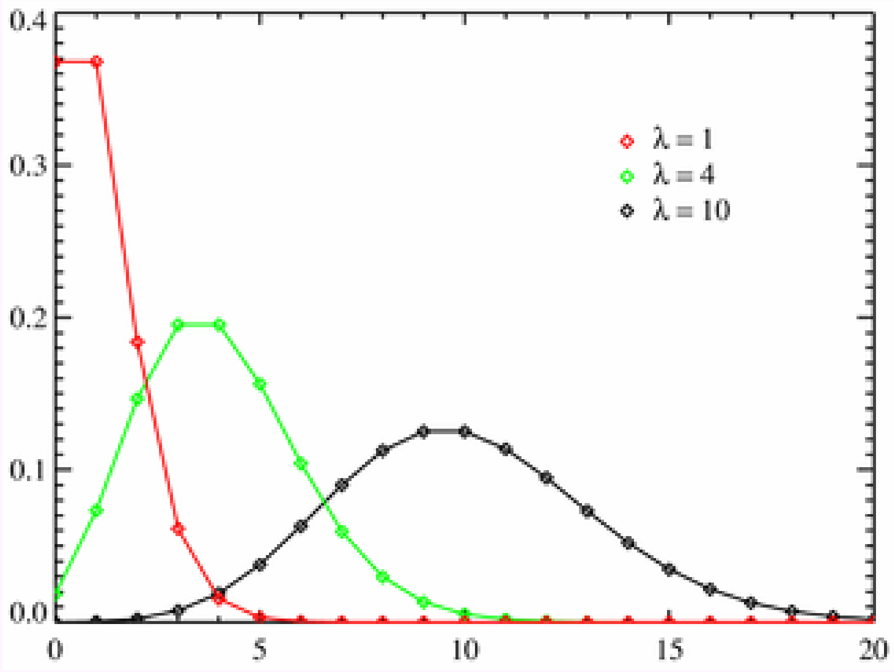
- **cuando el tiempo de medición crece, la distribución se aproxima a una normal de promedio λ y varianza λ**

- **midiendo una sola vez la cantidad # de eventos que ocurren en un tiempo t, puedo estimar f como**

$$f = \frac{\#}{t} \pm \frac{\sqrt{\#}}{t}$$

- **debido al crecimiento diferente entre el valor y su error, conviene medir tiempos largos para minimizar el error relativo:**

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{1}{\sqrt{\#}}$$



- **en algunos casos los experimentos se hallan influenciados por el fondo (radiación de fondo) por lo que el evento que queremos medir se encuentra alterado y no respeta la distribución de Poisson.**

Corresponde medir el fondo $\#_f$ durante un tiempo t_f, medir el evento combinado con el fondo # durante un tiempo t y determinar la frecuencia de ocurrencia como:

$$f_f = \frac{\#_f}{t_f} \qquad f_\# = \frac{\#}{t}$$

$$\longrightarrow \quad f = (f_\# - f_f) \pm \sqrt{\frac{\#}{t^2} + \frac{\#_f}{t_f^2}}$$


Gracias!