2-5-2012

Introducción a Partículas y Física Nuclear
Guía 09
1er semestre 2012

67. Verificar que las matrices $\vec{\alpha}$ y β dadas por

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli e I es la identidad en dos dimensiones, satisfacen los requerimientos de la ecuación de Dirac, es decir que son hermíticas, de traza nula y poseen autovalores ± 1. Mostrar que además satisfacen el álgebra de Dirac:

$$\begin{aligned} \{\alpha_i, \alpha_j\} &\equiv \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}\,, \qquad \alpha_i^2 = 1\,, \\ \{\alpha_i, \beta\} &\equiv \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0\,, \qquad \beta^2 = 1\,. \end{aligned}$$

68. **(*)** a) Demostrar que el Hamiltoniano de Dirac $\hat{H}$ de una partícula libre conmuta con el operador de impulso lineal $\vec{p}$, no conmuta con el operador de impulso angular orbital $\vec{L}$ ni con el operador de espín

$$\vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

pero sí lo hace con el de impulso angular total $\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$.

b) Mostrar que el operador $\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$ definido de esa manera satisface el álgebra de impulsos angulares y tiene autovalores $\pm\frac{1}{2}\hbar$.

c) Definiendo el operador helicidad $\hat{h} = \vec{\Sigma}.\frac{\vec{p}}{|p|}$, calcular $[\vec{p}, \vec{\Sigma}]$, $[\hat{H}, \hat{h}]$, $[\vec{p}, \hat{h}]$. ¿Se pueden encontrar estados que sean simultáneamente autoestados de $\hat{h}$, $\hat{H}$ y $\vec{p}$?

69. Verificar que cada componente de un fermión de Dirac satisface la ecuación de Klein-Gordon: $(\partial^2 + m^2)\Psi_i = 0$.

70. La ecuación de Dirac para una partícula libre tiene cuatro soluciones linealmente independientes asociadas al mismo valor de energía-impulso ($\vec{p}$ y E):

$$\Psi(x,t) = u^{(i)}(\vec{p})\ e^{-i(E\,t - \vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}\,, \qquad u^{(i)}(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \chi_i \\ \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\,\chi_i \end{pmatrix}, \qquad (i = 1, 2)$$

y

$$\Psi(x,t) = v^{(i)}(\vec{p})\ e^{i(E\,t - \vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}\,, \qquad v^{(i)}(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\,\chi_i \\ \chi_i \end{pmatrix}, \qquad (i = 1, 2),$$

con $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} > 0$, N una constante de normalización, $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Verificar explícitamente que son soluciones.
b) Mostrar que para $\vec{p} = 0$ se recuperan las soluciones en reposo.
c) Determinar el valor de N que define la normalización covariante $u^{(i)\dagger}u^{(j)} = v^{(i)\dagger}v^{(j)} = \delta_{ij}E/mc^2$. Mostrar que con esta normalización, la densidad $\rho = \psi^\dagger\psi$ es la componente temporal de un cuadrivector, y por lo tanto su integral en un volumen es invariante Lorentz.
d) Verificar que, para $\vec{p} = (0, 0, p)$, los espinores $u^{(1)}(\vec{p})$ y $u^{(2)}(\vec{p})$ son autoestados del operador de helicidad con autovalores ± 1.

71. a) Mostrar que $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, conocido como el *operador de quiralidad*, es hermítico, de cuadrado unitario, y anticonmuta con las cuatro matrices γ de Dirac. ¿Cuáles son sus autovalores? Mostrar que los operadores $P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$ son proyectores y proyectan sobre estados de quiralidad bien definida.
b) Demostrar que en el límite altamente relativista, la acción de γ^5 sobre los espinores $u_i(\vec{p})$ es la misma que la de $\hat{h}$, es decir γ^5 *coincide* con el operador de helicidad:

$$\gamma^5 u^{(i)}(\vec{p}) = (\Sigma \cdot \hat{p}) u^{(i)}(\vec{p}).$$

c) Verificar que para las antipartículas los signos de quiralidad y helicidad son opuestos

$$\gamma^5 v^{(i)}(\vec{p}) = -(\Sigma \cdot \hat{p}) v^{(i)}(\vec{p}).$$

72. a) A partir de las soluciones para partícula libre de la ecuación de Dirac con $E > 0$, verifique que en el límite no relativista las componentes inferiores del espinor de Dirac son de orden v/c respecto de las superiores, y que estas últimas tienen la forma de una solución de Schrödinger para partícula libre multiplicadas por un espinor de Pauli de dos componentes.
b) Repita el análisis anterior para las soluciones con $E < 0$.

73. Considerar la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético ($p^\mu \to p^\mu - eA^\mu$).

a) Mostrar que en el límite no relativista $u_B \sim \frac{1}{2m}\vec{\sigma}.(\vec{p} - e\vec{A})u_A$, donde u_A y u_B son las componentes superior e inferior del espinor de Dirac.

b) Usando este resultado, probar que

$$\left[\frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + eA^0 - \frac{e}{2m}\vec{\sigma}.\vec{B}\right] u_A = (E - m)u_A \ .$$

(En consecuencia, el factor giromagnético del electrón es igual a 2).

74. **(*)** La operación de *conjugación de carga* se define como

$$\Psi_c = C\Psi^*$$

donde la matriz C satisface $C^2 = 1,\ C^\dagger = C,\ C\gamma^{\mu *}C = -\gamma^\mu$

a) Mostrar que si Ψ satisface la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético, entonces Ψ_c satisface la misma ecuación cambiando el signo de la carga.

b) Probar que $C = i\gamma^2$ en la representación estándard y que existe una representación de las matrices de Dirac en la cual C es la identidad (esta es la representación de Majorana).