7-5-2014

Introducción a Partículas y Física Nuclear

Guía 10

1er semestre 2014

1. Verificar que las matrices $\vec{\alpha}$ y β dadas por

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli e I es la identidad en dos dimensiones, satisfacen los requerimientos de la ecuación de Dirac, es decir que son hermíticas, de traza nula y poseen autovalores ± 1. Mostrar que además satisfacen el álgebra de Dirac:

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} \equiv \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\,, \qquad \alpha_i^2 = 1\,,$$
$$\{\alpha_i, \beta\} \equiv \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0\,, \qquad \beta^2 = 1\,.$$

Mostrar que el conjunto de matrices $\{U\alpha_i U^\dagger, U\beta U^\dagger\}$, con U una matriz unitaria, también satisface las condiciones de Dirac.

2. **(*)** a) Demostrar que el Hamiltoniano de Dirac $\hat{H}$ de una partícula libre conmuta con el operador de impulso lineal $\vec{p}$, no conmuta con el operador de impulso angular orbital $\vec{L}$ ni con el operador de espín

$$\vec{\Sigma} \equiv \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

pero sí lo hace con el de impulso angular total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{\Sigma}$.

b) Mostrar que el operador $\vec{\Sigma}$ definido de esa manera satisface el álgebra de impulsos angulares y tiene autovalores $\pm\frac{1}{2}\hbar$.

c) Definiendo el operador helicidad $\hat{h} = 2\vec{\Sigma}.\frac{\vec{p}}{|p|}$, calcular $[\vec{p}, \vec{\Sigma}]$, $[\hat{H}, \hat{h}]$, $[\vec{p}, \hat{h}]$. ¿Se pueden encontrar estados que sean simultáneamente autoestados de $\hat{h}$, $\hat{H}$ y $\vec{p}$?

3. Mostrar que la onda plana

$$\Phi(x,t) = A\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}\,p_\mu x^\mu\right)$$

es solución de la ecuación de Klein-Gordon. ¿Es solución una combinación lineal de ondas planas? Verificar que cada componente de un fermión de Dirac satisface la ecuación de Klein-Gordon: $(\partial^2 + m^2)\Psi_i = 0$.

4. a) Mostrar que $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, conocido como el *operador de quiralidad*, es hermítico, de cuadrado unitario, y anticonmuta con las cuatro matrices γ de Dirac. ¿Cuáles son sus autovalores? Mostrar que los operadores $P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$ son proyectores y proyectan sobre estados de quiralidad bien definida.

b) Demostrar que en el límite altamente relativista, la acción de γ^5 sobre los espinores $u_i(\vec{p})$ es la misma que la de $\hat{h}$, es decir γ^5 *coincide* con el operador de helicidad:

$$\gamma^5 u^{(i)}(\vec{p}) = \hat{h}u^{(i)}(\vec{p}).$$

c) Verificar que para las antipartículas los signos de quiralidad y helicidad son opuestos

$$\gamma^5 v^{(i)}(\vec{p}) = -\hat{h}v^{(i)}(\vec{p}).$$

5. Considerar la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético $(p^\mu \to p^\mu - eA^\mu)$.

   a) Mostrar que en el límite no relativista $u_B \sim \frac{1}{2m}\vec{\sigma}.(\vec{p} - e\vec{A})u_A$, donde u_A y u_B son las componentes superior e inferior del espinor de Dirac.

   b) Usando este resultado, probar que

$$\left[\frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + eA^0 - \frac{e}{2m}\vec{\sigma}.\vec{B}\right] u_A = (E-m)u_A \ .$$

   (En consecuencia, el factor giromagnético del electrón es igual a 2).

6. **(*)** La operación de *conjugación de carga* se define como

$$\Psi_c = C\Psi^*$$

   donde la matriz C satisface $C^2 = 1,\ C^\dagger = C,\ C\gamma^{\mu *}C = -\gamma^\mu$

   a) Mostrar que si Ψ satisface la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético, entonces Ψ_c satisface la misma ecuación cambiando el signo de la carga.

   b) Probar que $C = i\gamma^2$ en la representación estándard y que existe una representación de las matrices de Dirac en la cual C es la identidad (esta es la representación de Majorana).

7. Un fermión relativista libre está descrito a $t = 0$ (en la representación de Pauli-Dirac) por el espinor:

$$\psi(\vec{x}, t=0) \ = \ N \begin{pmatrix} e^{ipz} \ - \ \frac{p}{E+m}\, e^{ipx} \\ \\ -\frac{p}{E+m}\, e^{ipx} \\ \\ \frac{p}{E+m}\, e^{ipz} \ + \ e^{ipx} \\ \\ e^{ipx} \end{pmatrix}$$

   con $E = \sqrt{p^2 + m^2}$. Encontrar la evolución temporal para $t > 0$. Qué valores de helicidad espera medir a tiempo $t > 0$?