14-5-2014

Introducción a Partículas y Física Nuclear

Guía 11

1er semestre 2014

1. La ecuación de Dirac para una partícula libre tiene cuatro soluciones linealmente independientes asociadas al mismo valor de energía-impulso ($\vec{p}$ y E):

$$\Psi(x,t) = u^{(i)}(\vec{p})\ e^{-i(E\,t-\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}, \qquad u^{(i)}(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \chi_i \\ \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\,\chi_i \end{pmatrix}, \qquad (i=1,2)$$

y

$$\Psi(x,t) = v^{(i)}(\vec{p})\ e^{i(E\,t-\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}, \qquad v^{(i)}(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\,\chi_i \\ \chi_i \end{pmatrix}, \qquad (i=1,2),$$

con $E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}>0$, N una constante de normalización, $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Verificar explícitamente que son soluciones.
b) Mostrar que para $\vec{p}=0$ se recuperan las soluciones en reposo.
c) Determinar el valor de N que define la normalización covariante $u^{(i)\dagger}u^{(j)} = v^{(i)\dagger}v^{(j)} = \delta_{ij}E/mc^2$. Mostrar que con esta normalización, la densidad $\rho=\psi^\dagger\psi$ es la componente temporal de un cuadrivector, y por lo tanto su integral en un volumen es invariante Lorentz.
d) Estudiar la ortogonalidad de las soluciones.

2. El grupo de las rotaciones en el espacio puede definirse como el grupo de matrices R reales de 3×3 tales que: $R\,R^t = R^t\,R = \mathbf{1}$ y $\det\,R=1$, y puede parametrizarse por tres ángulos θ_i, $i=1,2,3$. El operador de rotaciones es: $U(\vec{\theta}) = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{j}}$, donde $\vec{j}$ es el impulso angular, generador de rotaciones.
(a) Muestre que el producto escalar de vectores es invariante bajo rotaciones.
(b) Muestre que el operador de rotaciones para espín $\frac{1}{2}$ ($\vec{j}=\frac{\vec{\sigma}}{2}$) es: $U(\vec{\theta}) = \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{i}{2}\hat{\theta}.\vec{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}$.

3. El grupo de Lorentz (propio y ortócrono) puede definirse como el grupo de matrices Λ reales de 4×4 tales que: $\Lambda\,\Lambda^t = \Lambda^t\,\Lambda = g$, $\det(\Lambda)=1$ y $\Lambda^0{}_0 \geq 0$, donde los elementos de Λ son $\Lambda^\mu{}_\nu$, $(\Lambda\,\Lambda^t)_{\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g_{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.
(a) Obtenga la transformación de Lorentz correspondiente a un boost en el eje $\hat{x}$, y a una rotación en torno al eje $\hat{z}$, estudie el límite infinitesimal de dichas transformaciones.
(b) Identifique los seis parámetros correspondientes a una transformación de Lorentz (tres parámetros para boosts y tres para rotaciones).
(c) Muestre que el producto escalar de cuadrivectores es invariante bajo transformaciones de Lorentz.
(d) Observe que un cuadrivector tiene espín 1.

4. **(*)** De manera análoga al grupo de las rotaciones, el operador de transformaciones de Lorentz es: $S(\epsilon) = e^{\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}}$, donde $\mathcal{S}^{\mu\nu} = -\mathcal{S}^{\nu\mu}$ son los generadores de boosts y rotaciones, y $\epsilon_{\mu\nu}$ son los parámetros correspondientes. En el caso de los espinores de Dirac, los generadores $\mathcal{S}^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$.
(a) Mostrar que para un boost en el eje $\hat{x}$, con $\epsilon_{01}=\phi$: $S(\epsilon_{01}) = \mathbf{1}\cosh\frac{\phi}{2} + \gamma^0\gamma^1\sinh\frac{\phi}{2}$ ($\tanh\phi = v/c$).
(b) Mostrar en el caso particular del punto anterior que S no es unitaria y que: $S^\dagger\gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$.
(c) Asumiendo que el último resultado vale para una transformación de Lorentz general, ver que: $\bar{\psi}\psi$ es un invariante de Lorentz.
(d) Mostrar que la corriente $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ transforma como un cuadrivector.

5. Construir las soluciones tipo onda plana de la ecuación de Dirac mediante la aplicación de un boost sobre los espinores $\Psi(x) = u(0)e^{-imt}$ y $\Psi(x) = v(0)e^{imt}$ correspondientes a una partícula en reposo.

6. Verificar que el operador de espín se puede escribir en términos de las matrices α_j como: $\Sigma = -i\frac{\hbar}{4}\bar{\alpha} \times \bar{\alpha}$.

7. Otra representación posible para las matrices α y β es la de Weyl:

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} -\bar{\sigma} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

   Verificar que es una representación.