Ⓣ $\equiv \{1\} \cup \left\{ \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ define una b.o. (ó s.o. cerrado) en $\mathcal{I}[a,b]$, $\forall\, a,b \,/\, b-a=2l$: dado $f \in \mathcal{I}[a,b]$

$$S_N^{(f)} = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right) \xrightarrow[\|\cdot\|]{} f .$$

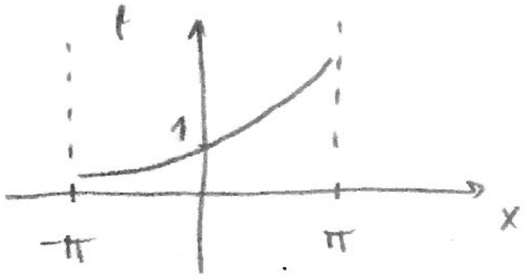
Por comodidad tomaremos $a=-\pi$ y $b=\pi$, con lo cual $\underline{l=\pi}$:

⇝ Ⓣ $= \{1\} \cup \{\cos nx, \operatorname{sen} nx\}_{n\in\mathbb{N}}$; $f \in \mathcal{I}[-\pi,\pi]$ ⇝

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \,, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \,, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$(n\in\mathbb{N})$

Ej) $f(x) = e^x$, $x \in [-\pi,\pi]$



$$\begin{cases} a_0 = (\operatorname{Sh}\pi)/\pi \\ a_n = \left((-1)^n\, 2\operatorname{Sh}\pi\right)/\pi(n^2+1) \\ b_n = \left((-1)^{n+1}\, 2n\operatorname{Sh}\pi\right)/\pi(n^2+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_N^{(e^x)}(x) = \frac{\operatorname{Sh}\pi}{\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2+1}\left[\cos(nx) - n\operatorname{sen}(nx)\right]\right] \left(\xrightarrow[\|\cdot\|]{} e^x\right)$$

Serie de senos y de cosenos

(∀x / f esté definida)

- Si $f \in \mathcal{I}[-\pi,\pi]$ es par $(f(x)=f(-x))^{⊛}$ $\Rightarrow b_n = 0$, y si es impar $(f(x) = -f(-x))^{⊛}$ $\Rightarrow a_0 = a_n = 0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$. O sea:

$$\begin{cases} f \text{ par}: & S_N^{(f)}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) \\ f \text{ impar}: & S_N^{(f)}(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}(nx) \end{cases}$$

(OBS: f en $[0,\pi]$ es una función arbitraria.)

- Ⓒ ≡ $\{1\} \cup \{\cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es S.O. en $\mathcal{I}[0,\pi]$.

Dado $f \in \mathcal{I}[0,\pi]$ ⇝ $\begin{cases} \tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx \\ \tilde{a}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx \end{cases}$ (Coef. de F. de cosenos)

⇝ $S_N^{\textcircled{c}(f)} = \tilde{a}_0 + \sum_{n=1}^{N} \tilde{a}_n \cos(nx)$ (Suma de F. de cosenos)

Ⓢ ≡ $\{\operatorname{sen}(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es S.O. en $\mathcal{I}[0,\pi]$. Dado $f \in \mathcal{I}[0,\pi]$,

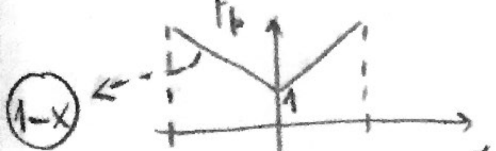
⇝ $\tilde{b}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$, $S_N^{\textcircled{s}(f)} = \sum_{n=1}^{N} \tilde{b}_n \operatorname{sen}(nx)$

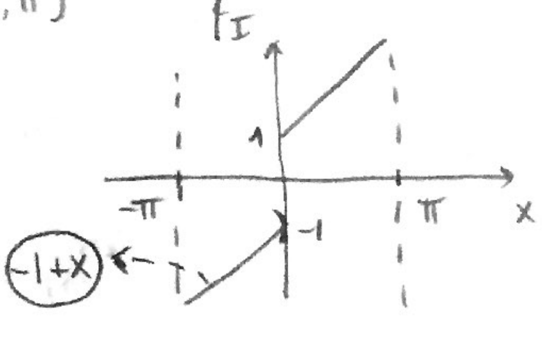
¿Son Ⓒ y Ⓢ b.o. en $\mathcal{I}[0,\pi]$?

Definición: Dado $f \in \mathcal{I}[0,\pi]$ se define su extensión par (resp impar) como la función $f_p \in \mathcal{I}[-\pi,\pi]$ (resp. $f_I \in \mathcal{I}[-\pi,\pi]$) /

$f_p(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,\pi]^{\circledast} \\ f(-x), & x \in [-\pi,0] \end{cases}$ (resp. $f_I(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0,\pi]^{\circledast} \\ -f(-x), & x \in [-\pi,0) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$).

Ⓔj $f(x) = 1+x$, $x \in [0,\pi]$





Teorema 1: Los conjuntos Ⓒ $= \{1\} \cup \{\cos(\frac{n\pi x}{\ell})\}_{n\in\mathbb{N}}$ y Ⓢ $= \{\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{\ell})\}_{n\in\mathbb{N}}$ son b.o. de $\mathcal{I}[a,b]$, $\forall a,b$ / $b-a=\ell$ (Idem $\mathcal{R}^2[a,b]$ y $\mathcal{L}^2[a,b]$.)

D/ Veremos el caso $a=0$, $b=\pi$ ($\therefore \ell=\pi$). Dado $f \in \mathcal{I}[0,\pi]$, consideremos $f_p \in \mathcal{I}[-\pi,\pi]$. Luego,

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_p(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \tilde{a}_0 \\ a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_p(x)\cos(mx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \tilde{a}_n \\ b_m = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \underset{\hookrightarrow[-\pi,\pi]}{S_N^{\textcircled{T}(f_p)}(x)} = \tilde{a}_0 + \sum_{m=1}^{N} \tilde{a}_n \cos mx = \underset{\hookrightarrow[0,\pi]}{S_N^{\textcircled{C}(f)}(x)}$. Por otro lado,

$$\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \left| S_N^{\textcircled{T}(f_p)}(x) - f_p(x) \right|^2 dx}_{} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad . \text{ Pero}$$

$$2\int_0^{\pi} \left| S_N^{\textcircled{C}(f)}(x) - f(x) \right|^2 dx \quad \therefore \quad S_N^{\textcircled{C}(f)} \xrightarrow[\|\cdot\|]{} f \quad . \left(\text{Idem } \textcircled{S}\right). //$$

Nociones de base

$\boxed{\text{C.l. finitas}}$ (V) ⇝ base algebraicas o de Hamel (∃ siempre):

$X \subseteq V$ es base si es (L.I.) y (genera) ⟺ escritura única.

$\boxed{\text{C.l. } \infty}$ (V + topología) base topológica o de Schauder:

$X = \{\phi_m\}_{m\in I}$ es base si $\forall v \in V$, $\exists!\, c_m$ / $\sum_{m/\psi(m)\le N} c_m \phi_m \xrightarrow[TOP]{} v$. ⊛

$(J, \psi: I \to J)$

$(I = J = \mathbb{N})$ $\qquad \left(\sum_{m=1}^{N} c_m \phi_m \xrightarrow[N\to\infty]{} v\right)$

Ⓔj b.o.(m) son base de Schauder (ver E6.P1). Para un S.O., si ∃ coef que cumplen ⊛ para la conv. en norma ⇒ esos coef. son los de F. Esto dice que un S.O. es cerrado ⟺ es SCHAUDER.

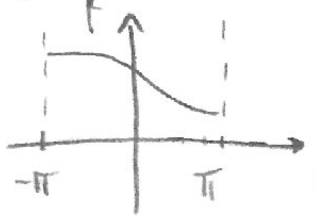
Convergencia puntual y uniforme de $S_N^{(f)}$ (T, E) en $G[a,b]$

(① ES. P1.
② Balanzat, 219.)

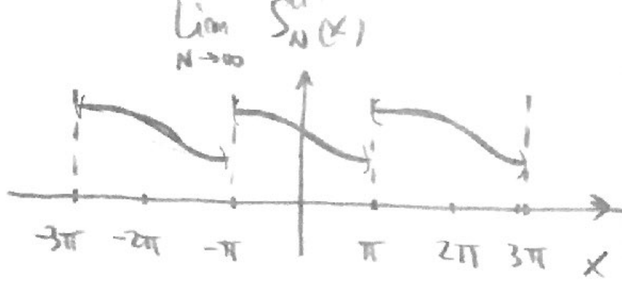
$$\begin{tikzcd}
& \boxed{\text{UNIFORME}}\ (f_n \rightrightarrows f) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dr, bend left=40, "(E2.P0)"] & \\
(f_n \to f)\ \boxed{\text{PUNTUAL}} \arrow[rr, Rightarrow, shift left, "①", "/" marking] & & \boxed{\text{MEDIA}}\ (f_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{} f) \arrow[ll, Rightarrow, shift left, "②", "/" marking]
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{PUNTUAL}}$ Por comodidad consideraremos $G[-\pi,\pi]$: $\begin{cases} Ⓣ & 1, \cos mx, \operatorname{sen} mx \\ Ⓔ & e^{imx} \end{cases}$

OBS: Como $S_N^{(f)} = a_0 + \sum_{m=1}^{N} (a_m \cos(mx) + b_m \operatorname{sen}(mx)) \Rightarrow S_N^{(f)}(x) = S_N^{(f)}(x+2k\pi)$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$. Luego, si $S_N^{(f)}$ conv. puntual/ a algo lo hará a una función 2π-periódica:



$S_N^{(f)} \to f$ en $(-\pi,\pi) \Rightarrow$



Definición: ① f es general/continua si $f \in G[a,b]$, $\forall [a,b]$. Escribiremos $f \in G$. ② $f \in G$ es 2π-periódica si $f(x) = f(x+2k\pi)$ $\forall x$ donde f esté definida, $\forall k \in \mathbb{Z}$. ③ Dada $f \in G[-\pi,\pi]$ se define su extensión 2π-periódica a $\hat{f} \in G$ / $\hat{f}(x+2k\pi) = f(x)$, $\forall x [-\pi,\pi)$ donde f esté definida.

- Vamos a ver que si $f \in G$, es 2π-periódica y "algo más" $\Rightarrow$ $S_N^{(f)}(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} (f(x+0) + f(x-0))/2$.

Definición: Dada $f \in G$ se define su derivada lateral a derecha en x_0 como $f'_R(x_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t}$, y a izquierda como

$$f'_L(x_0) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{f(x_0-\varepsilon)-f(x_0-0)}{\varepsilon} .$$

OBS: Vale linealidad y Leibniz.

Proposición 2: Si $f, f' \in G \Rightarrow F'_R(x_0) = f'(x_0+0) \wedge f'_L(x_0) = f'(x_0-0), \forall x_0$.
(CHURCHILL, 83)

Lema A (Riemann-Lebesgue) Si $F \in G[a,b] \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_a^b F(x)\cos(kx)\,dx =$
$= \lim_{k\to\infty} \int_a^b F(x)\,\mathrm{sen}(kx)\,dx = 0$ $(k\in\mathbb{R})$. (CHURCHILL, 87)

OBS: De Bessel sabemos que $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_a^b F(x)\cos\left(\overset{k}{\boxed{\frac{n\pi}{l}}}x\right)dx}_{a_n} = 0$ (idem "sen")

El lema dice "un poco más"!

Lema B: Si $F \in G[a,b]$ y $\exists F'_{R,L}(x_0)$ para $x_0 \in (a,b) \Rightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b F(x)\,\frac{\mathrm{sen}(k(x-x_0))}{x-x_0}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(F(x_0+0)+F(x_0-0)\right).$$

D// $\underset{}{\int_a^b} = \underset{①}{\int_a^{x_0}} + \underset{②}{\int_{x_0}^b} = \left\{\begin{array}{l} ①\ t = x_0 - x \longrightarrow \int_0^{x_0-a} F(x_0-t)\,\frac{\mathrm{sen}(kt)}{t}\,dt \\ ②\ t = x - x_0 \longrightarrow \int_0^{b-x_0} F(x_0+t)\,\frac{\mathrm{sen}(kt)}{t}\,dt \end{array}\right.$

① $\int_0^{x_0-a} [F(x_0-t) - F(x_0-0) + F(x_0-0)]\,\frac{\mathrm{sen}(kt)}{t}\,dt = F(x_0-0)\int_0^{x_0-a} \frac{\mathrm{sen}(kt)}{t}\,dt +$

$+ \int_0^{x_0-a} \underbrace{\frac{F(x_0-t)-F(x_0-0)}{t}}\,\mathrm{sen}(kt)\,dt$ $\qquad \xrightarrow{u=kt} \int_0^{k(x_0-a)} \frac{\mathrm{sen}\,u}{u}\,du$

$\equiv H(t) \Rightarrow H \in G[0, x_0-a]$, pues $H(0+0) = F'_L(x_0)$ $\qquad$ (RESIDUOS) $\downarrow_{k\to\infty}$ $\boxed{\pi/2}$

$k\to\infty \downarrow$

$\boxed{0}$ por Lema A $\Rightarrow$ ① $\xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\pi}{2} F(x_0-0)$. Igual/, ② $\xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\pi}{2} F(x_0+0)$. //

Lema C: Dada $f \in G$, 2π-per., $S_N^{(f)}(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(x) \frac{\text{sen}[(N+\frac{1}{2})(x-x_0)]}{\text{sen}[\frac{1}{2}(x-x_0)]}dx$,

$\forall a,b / b-a = 2\pi$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$. $\downarrow$ (P/ $f \in G[-\pi,\pi]$)

D// (idea) ① Si F e 2π-per $\Rightarrow \int_a^{a+2\pi} F(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$, $\forall a \in \mathbb{R}$. (ejercicio)

② $S_N^{(f)}(x_0) = a_0 + \sum_{m=1}^N [a_m\cos(mx_0) + b_m \text{sen}(mx_0)] = \frac{1}{2\pi}\int_{\cancel{-\pi}\,a}^{\cancel{\pi}\,b} f(x)dx +$

$+ \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^N\left[\left(\int_{\cancel{-\pi}\,a}^{\cancel{\pi}\,b} f(x)\cos(mx)dx\right)\cos mx_0 + \left(\int_{\cancel{-\pi}\,a}^{\cancel{\pi}\,b} f(x)\,\text{sen}\,mx\,dx\right)\text{sen}(mx_0)\right] =$

$= \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(x)\left[1 + 2\underbrace{\sum_{m=1}^N \cos(m(x-x_0))}_{}\right]dx$ (N.J, 36)

$\text{Re}\left(\sum_{m=1}^N e^{im(x-x_0)}\right) = \text{Re}\left(\frac{1-\left[e^{i(x-x_0)}\right]^{N+1}}{1-e^{i(x-x_0)}} - 1\right)\dots$ //

Teorema (P): $f \in G$, 2π-per, $\exists f'_{R,L}(x_0) \Rightarrow S_N^{(f)}(x_0) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$.

D// Tomo a,b / $\overset{\text{(Lema B)}}{x_0 \in (a,b)}$ y $\overset{\text{(Lema C)}}{b-a = 2\pi}$. Definamos $F(x) = f(x)\frac{\frac{1}{2}(x-x_0)}{\text{sen}(\frac{x-x_0}{2})}$ $\xrightarrow{x\to x_0} 1$

Como $\left|\frac{x-x_0}{2}\right| < \pi$ ⊛, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow F \in G[a,b]$, $F(x_0 \pm 0) =$

$= f(x_0 \pm 0)$, y $\exists F'_{R,L}(x_0)$. Luego:

⊛ $\frac{t}{\text{sen}\,t} \in C^\infty_{(-\pi,\pi)}$

$\underset{\text{(Lema C)}}{S_N^{(f)}(x_0) \overset{\downarrow}{=}} \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(x)\frac{\text{sen}[(N+\frac{1}{2})(x-x_0)]}{\text{sen}[\frac{1}{2}(x-x_0)]}dx = \frac{1}{\pi}\int_a^b F(x)\frac{\text{sen}[(N+\frac{1}{2})(x-x_0)]}{(x-x_0)}dx \xrightarrow[N\to\infty]{}$

$\xrightarrow[N\to\infty]{\text{(Lema B)}} \frac{1}{2}[F(x_0+0) + F(x_0-0)] = \frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$. //

Corolario (P): Si $f \in C^0$, 2π-per, $\exists f'_{R,L}(x_0)$ $\forall x_0 \Rightarrow \boxed{S_N^{(f)} \to f}$.