$\boxed{\text{UNIFORME}}$

<u>Proposición 1</u>: Sea $f \in C^0$, 2π-per. ($\therefore f(\pi) = f(-\pi)$) y tal que $f' \in G$.

Luego $\exists \sum_{n\geq 1}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n\geq 1}^{\infty} |b_n|$, siendo a_n y b_n los coef de F de $f \in G[-\pi,\pi]$.

D// Llamemos α_0, α_n y β_n a los coef. de F de f' (en $[-\pi,\pi]$).

Luego,

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx \underset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi}\left(f(\pi) - f(-\pi)\right) = 0 \\ \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx \underset{(*)}{\overset{\text{(PARTES)}}{=}} n\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx = n\,b_n \\ \beta_n = -n\,a_n \end{cases}$$

$(*)$ (E1. P0), y por lo tanto

$$\sum_{n\geq 1}^{N} |a_n|,\ \sum_{n\geq 1}^{N} |b_n| \leq \sum_{n\geq 1}^{N} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)^{1/2} = \sum_{n\geq 1}^{N} \underbrace{\underbrace{\frac{1}{n}}_{A_n} \underbrace{\left(|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2\right)^{1/2}}_{B_n}}_{}$$

$$\leq \left(\sum_{n\geq 1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n\geq 1}^{N}\left(|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2\right)\right)^{1/2}$$

$(\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^N)$. $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{CAN} \underset{(C-S)}{\leq} \|\vec{A}\|_{CAN} \|\vec{B}\|_{CAN}$

$\downarrow$ Converge (Ver Noriega, 139)

$\downarrow_{N\to\infty}$ $\|f'\|$, por PARSEVAL

$\Rightarrow \exists \sum_{n\geq 1}^{\infty} |a_n|$ y $\sum_{n\geq 1}^{\infty} |b_n|$ por criterio de comparación. //

<u>Teorema (U)</u>: Si $f \in C^0$, 2π-per. y $f' \in G \Rightarrow \boxed{S_N^{(f)} \rightrightarrows f}$.

D// Como $f, f' \in G \Rightarrow \exists f'_{R,L}(x_0)$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$. Como además $f \in C^0 \Rightarrow$ (Corolario (P)) $S_N^{(f)} \to f$. Por otro lado, $|a_n \cos(nx) + b_n \,\text{sen}(nx)| \leq$ $\leq |a_n| + |b_n| \Rightarrow$ (por WEIERSTRASS) $S_N^{(f)}$ conv. absoluta y unif. //

Derivación término a término (t.a.t)

Si f está en las cond. de TEO (1), podemos calcular $S_N^{(f)}$ y $S_N^{(f')}$:

$$\left(S_N^{(f)}\right)' = \left(a_0 + \sum_{n\geq 1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen} nx\right)\right)' = \sum_{n\geq 1}^{N} \left(\underbrace{n b_n}_{\alpha_n} \cos nx - \underbrace{n a_n}_{\beta_n} \operatorname{sen} nx\right)$$

$$= S_N^{(f')}, \quad \forall N \in \mathbb{N}. \qquad (\alpha_0 = 0) \qquad \text{(coef. de } f'\text{)}$$

Teorema 2: Si $f \in C^0$, 2π-per y $f' \in G \Rightarrow \forall x_0 \in \mathbb{R} \,/\, \exists (f')'_{R,L}(x_0)$,

$$\lim_{N\to\infty} \left(S_N^{(f)}(x_0)\right)' = \lim_{N\to\infty} S_N^{(f')}(x_0) = \tfrac{1}{2}\left[f'(x_0+0) + f'(x_0-0)\right].$$

(derivada t.a.t de la serie de f) (serie de f')

Esquemático:

$$\begin{tikzcd}
 & f' \arrow[r] & S_N^{(f')} \arrow[dr] & & \\
f \arrow[ur] \arrow[dr] & & & (N\to\infty) & \sim f' \\
 & S_N^{(f)} \arrow[r] & \left(S_N^{(f)}\right)' \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Corolario 3: Si $f \in C^1$, 2π-per y $\exists (f')'_{R,L}(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\left(S_N^{(f)}\right)' = S_N^{(f')} \to f'$. Si además $f'' \in G \Rightarrow$ la conv. es uniforme.

Integración t.a.t.

Teorema 4: Dada $f \in G$, 2π-per y tal que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \overset{(*)}{=} 0$, se tiene para $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ que $\lim_{N\to\infty} \int_0^x S_N^{(f)}(t)\,dt = \lim_{N\to\infty} S_N^{(F)}(x) = F(x)$

uniformemente. (integral t.a.t. de la serie de f) (serie de F)

Esquemática/:

$$
\begin{tikzcd}
 & \int f \arrow[r] & S_N^{(\int f)} \arrow[dr, "\rightrightarrows"] & \\
f \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \int f \\
 & S_N^{(f)} \arrow[r] & \int S_N^{(f)} \arrow[ur, "\rightrightarrows"'] &
\end{tikzcd}
$$

D// ① Como $f \in G \Rightarrow F \in C^0$ y $F' = f \in G$. Además, como f es 2π-per y $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \overset{(*)}{=} 0 \Rightarrow F$ es 2π-per. Según TEO Ⓤ p/ F, $S_N^{(F)} \rightrightarrows F$.

② Si A_m y B_m son los coef. de F. de F, puede verse integrando por partes que $A_m = -b_m/m$ y $B_m \overset{(*)}{=} a_m/m$, $\forall m \geq 1$. Para conocer A_0, notemos que $F(x) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos(mx) + B_m \operatorname{sen} mx)$ ∴ si $x=0$, como $F(0)=0$, se sigue que $A_0 = -\sum_{m=1}^{\infty} A_m = +\sum_{m=1}^{\infty} b_m/m$. Luego,

$$\lim_{N\to\infty} S_N^{(F)}(x) = \lim_{N\to\infty} \left\{ A_0 + \sum_{m=1}^{N} \big(\underbrace{A_m}_{-b_m/m} \cos(mx) + \underbrace{B_m}_{a_m/m} \operatorname{sen}(mx) \big) \right\} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} b_m/m + \sum_{m=1}^{\infty} \left(-b_m/m \cos mx + a_m/m \operatorname{sen}(mx) \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\underbrace{b_m/m\,(1-\cos mx)}_{b_m \int_0^x \operatorname{sen}(mt)\,dt} + \underbrace{a_m/m \operatorname{sen} mx}_{a_m \int_0^x \cos(mt)\,dt} \Big) = \lim_{N\to\infty} \int_0^x \underbrace{\sum_{m=1}^{N} (a_m \cos mt + b_m \operatorname{sen} mt)}_{\substack{S_N^{(f)}(t) \\ (\text{pues } a_0 = 0) \\ (*)}} dt$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^x S_N^{(f)}(t)\,dt. \quad //$$

Ejemplos de EDPs

$\boxed{\text{orden } 1}$ $\begin{cases} \text{H-J} & \underbrace{\partial S/\partial t}_{S_t} + H(x, \nabla S) = 0 \quad (S = S(t,x)) \\ \text{Transporte} & u_t + b \cdot \nabla u = 0 \quad (u = u(t,x)) \\ & (b \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$

no lineal

$\boxed{\text{orden } 2}$ $\begin{cases} \text{Laplace} & \Delta u = 0 \quad (u = u(x)) \\ \text{Ondas} & u_{tt} - \Delta u = 0 \quad (u = u(t,x)) \\ \text{Calor} & u_t - \Delta u = 0 \quad (u = u(t,x)) \end{cases}$

(Caso homogéneo) — u incógnita

(Más ej. y definición general, ver Evans)

E.D.P lineales de orden 2

$u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega)$ /

$$(*) \quad \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}}_{\partial_i \partial_j} u(x) + \sum_{j=1}^{n} B_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) + C(x)\, u(x) = 0$$

(Caso homogéneo)

Si A, B y C son ctes, $(*)$ puede llevarse a una forma más simple.

① $\forall A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ vale que $A = \underset{\text{(simétrica)}}{A^{(S)}} + \underset{\text{(anti-simétrica)}}{A^{(A)}}$, con $(A^{(S)})^t = A^{(S)}$, y $(A^{(A)})^t = -A^{(A)}$. Basta tomar $A^{(S)} = (A + A^t)/2$, $A^{(A)} = (A - A^t)/2$.

Luego $\sum_{ij} A_{ij} \partial_i \partial_j = \sum_{ij} A^{(S)}_{ij} \partial_i \partial_j + \underbrace{\sum_{ij} A^{(A)}_{ij} \partial_i \partial_j}_{0} = \sum_{ij} A^{(S)}_{ij} \partial_i \partial_j$

pues $\sum_{ij} \underbrace{A^{(A)}_{ij}}_{-A^{(A)}_{ji}} \underbrace{\partial_i \partial_j}_{\partial_j \partial_i} = -\sum_{ij} A^{(A)}_{ji} \partial_j \partial_i \underset{i \leftrightarrow j}{=} -\sum_{ij} A^{(A)}_{ij} \partial_i \partial_j$.

- Podemos suponer entonces que A es simétrica. En tal caso, A será diagonalizable por una matriz ortogonal, i.e. $\exists G /$ $G^{-1} = G^t$ y $G A G^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, o en coeficientes:

$$\sum_{kl} G_{ik} A_{kl} G_{jl} \overset{i}{=} \delta_{ij} \lambda_i .$$

- G define un cambio de variables (indep): $Y = Y(X) = G \cdot X$ $\left(Y_i = \sum_j G_{ij} x_j\right)$ ii, y su inversa: $X = X(Y) = G^t \cdot Y$ $\left(X_i = \sum_j G_{ji} Y_j\right)$

Tal cambio induce un cambio de variable dependiente:

$u \mapsto \tilde{u}$ / $\tilde{u}(Y) = u(X(Y)) = u(G^t \cdot Y)$ $\left(\tilde{u}(Y) = u(X)\right)$

Notar que $u(X) = \tilde{u}(Y(X)) = \tilde{u}(G \cdot X)$ iii

- ¿ $\partial u / \partial X \leftrightarrow \partial \tilde{u} / \partial Y$? $\frac{\partial}{\partial x_i} u(X) \overset{iii}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{u}(G \cdot X) =$

$$= \sum_l \frac{\partial}{\partial Y_l} \tilde{u}(Y) \underbrace{\frac{\partial Y_l}{\partial x_i}}_{\overset{ii}{=} G_{li}} = \sum_l G_{li} \frac{\partial \tilde{u}(Y)}{\partial Y_l} .$$

Del mismo modo se ve que: $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(X) = \sum_{k,l} G_{li} G_{kj} \frac{\partial^2}{\partial Y_l \partial Y_k} \tilde{u}(Y)$

- Luego $\sum_{ij} A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(X) = \sum_{kl} \underbrace{\left(\sum_{ij} A_{ij} G_{li} G_{kj}\right)}_{\overset{1}{=} \delta_{kl} \lambda_k} \frac{\partial^2}{\partial Y_l \partial Y_k} \tilde{u}(Y) =$

$$= \sum_k \lambda_k \frac{\partial^2}{\partial Y_k^2} \tilde{u}(Y)$$

- Por otro lado, $\sum_j B_j \partial/\partial x_j \, u(X) = \sum_i \underbrace{\left(\sum_j B_j G_{ij}\right)}_{B_i'} \partial/\partial Y_i \, \tilde{u}(Y)$

$\boxed{\text{Efecto}}$ $A_{ij} \rightsquigarrow \delta_{ij} d_j$, en (A)

(2) Supongamos que ordenamos los autovalores de A / los primeros son los positivos (n_+), después los neg. (n_-) y por último los nulos (n_0). Definamos: $Z = Z(Y)$ /

$$Z_i = \begin{cases} Y_i/\sqrt{|d_i|} & , i = 1, \dots, n_+ + n_- \\ Y_i & , \text{resto} \end{cases} \rightsquigarrow \hat{u}(Z) = \tilde{u}(Y(Z))$$

$(B_i' \rightsquigarrow B_i'')$

$\boxed{\text{Efecto}}$ Desaparecen los d_K en (A).

(3) Definamos ahora: $\hat{v}(Z) = e^{-\underbrace{\alpha \cdot Z}_{\sum_i \alpha_i Z_i}} \hat{u}(Z)$ con

$$\alpha_j = \begin{cases} -\frac{1}{2} B_j'' & , j = 1, \dots, n_+ \\ \frac{1}{2} B_j'' & , j = n_+ + 1, \dots, n_+ + n_- \\ 0 & , \text{resto} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Efecto}}$ Desaparecen $\partial/\partial Z_i$ con $i \leq n_+ + n_-$, en (B).

(4) Por último, definamos $W = W(Z)$ /

$$W_i = \begin{cases} Z_i/B_i'' & , \text{si } B_i'' \neq 0 \wedge i > n_+ + n_- \\ Z_i & , \text{si } B_i'' = 0 \text{ ó } i \leq n_+ + n_- \end{cases} \rightsquigarrow v(W) = \hat{v}(Z(W))$$

$\boxed{\text{Efecto}}$: $B_i'' \rightsquigarrow \delta_i = \begin{cases} 1 & , \text{si } B_i'' \neq 0 \\ 0 & , \text{si } B_i'' = 0 \end{cases}$, en (B).

VER PASOS EN HOJA (7)

$$\underbrace{\sum_{ij} A_{ij}\, \partial_i \partial_j\, u(x)}_{A} + \underbrace{\sum_j B_j\, \partial_j\, u(x)}_{B} + \underbrace{C\, u(x)}_{C} = 0 ; F \qquad (*)$$

(1) $$\sum_k d_k\, \partial_k^2\, \tilde{u}(y) + \sum_i B_i'\, \partial_i\, \tilde{u}(y) + C\, \tilde{u}(y) = 0 ; \tilde{F}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{m_+} \partial_k^2\, \hat{u}(z) - \sum_{k=1}^{m_-} \partial_{k+m_+}^2\, \hat{u}(z) + \sum_\ell B_\ell''\, \partial_\ell\, \hat{u}(z) + C\, \hat{u}(z) = 0 ; F$$

(3) $$\cancel{e}^{\alpha t}\left(\sum_{k=1}^{m_+} \partial_k^2\, \hat{v}(z) - \sum_{k=1}^{m_-} \partial_{k+m_+}^2\, \hat{v}(z) + \sum_{\ell=1}^{m_0} B_{\ell+m_+ + m_-}''\, \partial_{\ell+m_+ + m_-}\, \hat{v}(z) + C'\, \hat{v}(z) \right) = 0 ; \underbrace{F e^{\alpha t}}_{F'}$$

(4) $$\sum_{k=1}^{m_+} \partial_k^2\, v(w) - \sum_{k=1}^{m_-} \partial_{k+m_+}^2\, v(w) + \sum_{k=1}^{m_0} \delta_k\, \partial_{k+m_+ + m_0}\, v(w) + C'\, v(w) = 0 ; F' \qquad (\cdot)$$