$$\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}\, \partial_i \partial_j u + \sum_{j=1}^{m} B_j\, \partial_j u + C u = 0 \quad (*)$$

$$\sum_{j=1}^{m_+} \partial_j^2 v - \sum_{j=1}^{m_-} \partial^2_{j+m_+} v + \sum_{j=1}^{m_0} \delta_j\, \partial_{j+m_++m_-} v + C' v = 0 \quad (\odot)$$

<u>Proposición 1</u>. Dado $A \in Mat(m \times m, \mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^m$ y $C \in \mathbb{R}$, $\exists\, m_+, m_-, m_0 \in \mathbb{N}_0$ / $m_+ + m_- + m_0 = m$, $\delta_j \in \{0,1\}$ $(j = 1, \dots, m_0)$ y $C' \in \mathbb{R}$ / $(*)$ y $(\odot)$ son equivalentes.

<u>Definición</u>: ① Una E.D.P de orden 2 lineal (en $\mathbb{R}^m$) se dice en su <u>forma estándar</u> si tiene la forma $\odot$. ② Se dice que es <u>elíptica</u> si $m_+ = m$ ó $m_- = m$; si no es elíptica y $m_+ + m_- = m$, se dice que es <u>hiperbólica</u>; y si $m_+ + m_- < m$ se dice que es <u>parabólica</u>.

<u>OBS</u>: Podemos suponer que $m_+ \geq m_-$ y $m_+ \geq 1$ (siempre) (Basta multiplicar por -1 y cambiar $x_i \to -x_i$).

Ej $\mathbb{R}^2$ (x,y) $\boxed{m=2}$

$m_+ = 2 \rightsquigarrow$ (E) $u_{xx} + u_{yy} + Cu = 0$ $\boxed{\text{LAPLACE}}$

$m_+ = 1$:
- $m_- = 1 \rightsquigarrow$ (H) $u_{xx} - u_{yy} + Cu = 0$ $\boxed{\text{ONDAS}}$
- $m_- = 0 \rightsquigarrow$ (P)
  - $\delta \neq 0$: $u_{xx} + u_y + Cu = 0$
  - $\delta = 0$: $u_{xx} + Cu = 0$

$\boxed{\text{CALOR}}$

(¿Mayor dimensión? Ver E2. P.2)

<u>Problema de Dirichlet</u> (LAPLACE + BORDE)

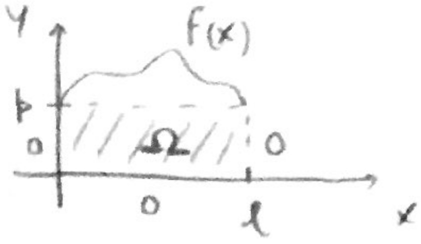
Se busca $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ (Soluc. clásica) / (D) $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \quad \text{(ARMÓNICA)} \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$

Con $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ / $g \in C^0(\partial\Omega)$.

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\Omega = (0,\ell)\times(0,p)$, puede verse que (D) es reducible a 4 problemas de la forma: (E3. P2)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (A) \\ u(x,0) = u(0,y) = u(\ell,y) = 0 & (B_1) \\ u(x,p) = f(x) & (B_2) \quad (\text{con } f(0) = f(\ell) = 0) \end{cases}$$

$(f \in C^0[0,\ell])$



Separación de variables ($\mathbb{R}^2$)

IDEA: Buscar $u(x,y) \overset{(*)}{=} X(x)\,Y(y)$ que cumpla (A) y (B_1) (o sea, EDP + COND. HOMOG.), y luego hacer C.L. de ellas que cumplen (B_2) (las COND NO HOMOG.)

- Reemplazando (*) en (A) se tiene.

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y) \Rightarrow \text{(dividido por } X(x)Y(y))$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \Rightarrow$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = cte \Rightarrow X'' - \lambda X = 0,\quad Y'' + \lambda Y = 0$$

- Reemplazando (*) en (B_1):

$$X(x)\,Y(0) = X(0)\,Y(y) = X(\ell)\,Y(y) = 0 \Rightarrow Y(0) = X(0) = X(\ell) = 0$$

Luego, (A) y (B_1) dicen que:

$$(1)\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} \wedge \quad (2)\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases}$$

1 $\boxed{\lambda \neq 0}$ $X(x) = A e^{\sqrt{\lambda} x} + B e^{-\sqrt{\lambda} x}$, $X(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow A = -B$

$X(\ell) = 0 \Rightarrow A e^{\sqrt{\lambda} \ell} - A e^{-\sqrt{\lambda} \ell} = 0 \underset{(A \neq 0)}{\Rightarrow} e^{2\sqrt{\lambda} \ell} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{2} \sqrt{\lambda} \ell = \cancel{2} m \pi i \Rightarrow \lambda = -m^2\pi^2/\ell^2 \quad \wedge \quad X(x) = A \, \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)$

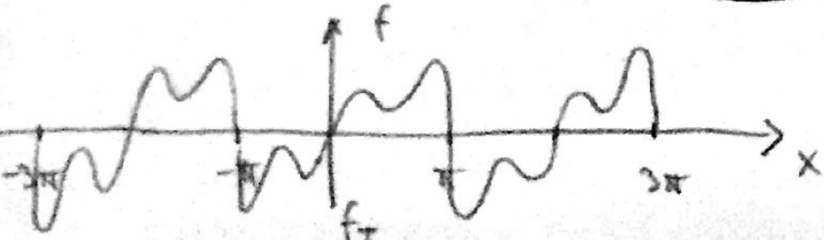
$\rightsquigarrow \boxed{\lambda = \lambda_m = -m^2\pi^2/\ell^2}$, $\boxed{X = X_m = \alpha_m \, \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)}$ $\boxed{\boxed{\lambda = 0} \Rightarrow X(x) = Ax + B \Rightarrow A = B = 0}$

2 $\begin{cases} Y'' + \lambda_m Y = 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} Y'' - m^2\pi^2/\ell^2 \, Y = 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{Y = Y_m = \beta_m \, \mathrm{sh}\left(\frac{m\pi y}{\ell}\right)}$

- Por comodidad, tomemos $p = \ell = \pi \rightsquigarrow \begin{cases} X_m(x) = \alpha_m \, \mathrm{sen}(m x) \\ Y_m(y) = \beta_m \, \mathrm{sh}(m y) \\ \lambda_m = -m^2 \end{cases}$

- Resumiendo, cada $\tilde{u}_m(x,y) \equiv X_m(x) Y_m(y) = \alpha_m \beta_m \, \mathrm{sen}(mx) \, \mathrm{sh}(my)$ resuelve (A) y (B_1). También toda c.l. (finita) $u_N(x,y) = \sum_{m=1}^N c_m \tilde{u}_m(x,y) = \sum_{m=1}^N \underbrace{\gamma_m}_{(c_m \alpha_m \beta_m)} \mathrm{sen}(mx) \, \mathrm{sh}(my)$ resuelve (A) y (B_1). Faltaría resolver (B_2), que dice $u(x,\pi) = f(x)$. Para u_N eso significa que $\sum_{m=1}^N \gamma_m \, \mathrm{sen}(mx) \, \mathrm{sh}(m\pi) \overset{(i)}{=} f(x)$. Esto podría ser cierto si $N \to \infty$, pues tendríamos la serie de senos de f!

- Como $f \in C^0[0,\pi]$ y $f(0) = f(\pi) = 0 \Rightarrow f_I \in C^0[-\pi,\pi]$, y



$f_I \in C^0$ (ext. 2π-per)

Si además, $\exists \, (\hat{f}_I)'_{R,L} \Rightarrow f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(mx)$ (ii), con (4)

con $b_m = 2/\pi \int_0^\pi f(x) \sin mx \, dx$. Luego, comparando (i) y (ii):

$\boxed{\gamma_m = b_m / \operatorname{sh} m\pi}$ En consecuencia, como resultado del procedimiento llevado a cabo tenemos un candidato a solución:

$$\boxed{u(x,y) = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} b_m \frac{\operatorname{sh}(my)}{\operatorname{sh}(m\pi)} \sin(mx)} \left(= \lim_{N\to\infty} u_N(x,y) \right)$$

¿Será tal u solución? (1) ¿$\exists u$? (2) ¿$u \in C^0(\bar{\Omega})$?

(3) ¿$u \in C^2(\Omega)$? (4) ¿u cumple (A), $\underbrace{(B_1), (B_2)}_{\checkmark}$?

(1) Sabemos que $\underline{\hat{f}_I \in C^0}$. Por otro lado, si $\underline{\hat{f}_I' \in G}$ (basta que $f' \in G[0,\pi]$)

$\Rightarrow \left(\sum_{m=1}^{N} b_m \sin(mx) \rightrightarrows f \right.$ y$\left.\right) \; \exists \sum_{m=1}^{\infty} |b_m|$. Supongamos que
(TEO (U))

$\hat{f}_I' \in G$. Luego, como $\left| b_m \underbrace{\frac{\operatorname{sh} my}{\operatorname{sh} m\pi}}_{\leq e^{-m(\pi-y)}} \overbrace{\sin(mx)}^{\leq 1} \right| \leq |b_m| \underbrace{e^{-m(\pi-y)}}_{\leq 1} \leq |b_m|$,

por WEIERSTRASS se sigue que

u_N conv. absoluta y unif. en $\mathbb{R} \times [0,\pi] \therefore$ en $\bar{\Omega}$. Llamemos $\boxed{u}$ a su límite

(2) Como cada $u_N \in C^0(\mathbb{R}^2) \subseteq C^0(\bar{\Omega})$ y $u_N \rightrightarrows u \Rightarrow \boxed{u \in C^0(\bar{\Omega})}$

(3) Notación: $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \rightsquigarrow D^{\overset{\alpha}{(3,1)}} u = \partial^{\overset{|\alpha|}{4}} / \partial x^3 \partial y \; u$

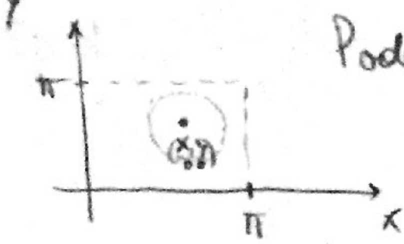
$\left(u: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \; \alpha = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}_0^k \rightsquigarrow D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_k^{m_k}} \right.$, siendo
$|\alpha| = \sum_{i=1}^{k} m_i$.

Si $|\alpha| = n \Rightarrow D^{\alpha} u_N = \sum_{m=1}^{N} \underbrace{\frac{m^{n}\, b_m}{Sh(m\pi)} (\pm\, Sh \circ Ch)(my)\,(\pm \cos \circ \operatorname{sen})(mx)}_{(*)}$

Además,

$$|(*)| \leq m^{n} |b_m|\, 2\, e^{-m(\pi - y)}$$

Tomemos $(x_0, y_0) \in \Omega$. Como Ω es abierto, $\exists\, U \subseteq \Omega \,/\, (x_0, y_0) \in U$.



Podemos tomar $U \,/\, \exists\, p \,/\, y < p < \pi,\ \forall (x,y) \in U$.

Luego $|(*)| \leq \underbrace{m^{n} |b_m|\, 2\, e^{-m(\pi - p)}}_{(\text{Converge x Cauchy ó D'Alembert})}$ en U. ⓐ

Por otro lado, consideremos el siguiente resultado (E4. P0.):

ⓑ $\begin{cases} g_m \in C^{n}(A),\ g_m \to f \ \text{y}\ D^{\alpha} g_m \rightrightarrows g_{\alpha},\ \forall \alpha \,/\, |\alpha| \leq n \Rightarrow \\ f \in C^{n}(A) \ \text{y}\ D^{\alpha} g_m \rightrightarrows D^{\alpha} f \ (\text{ie } g_{\alpha} = D^{\alpha} f). \end{cases}$

Usando WEIERSTASS, de ⓐ se sigue que $D^{\alpha} u_N$ conv. uniformemente en U.

Como $\overset{\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)}{u_N} \to u$ (en U), de ⓑ se sigue que $u \in C^{\infty}(U)$ y $D^{\alpha} u_N \rightrightarrows D^{\alpha} u$, $\forall \alpha$, en U. Como esto es válido $\forall (x_0, y_0) \in \Omega \Rightarrow \boxed{u \in C^{\infty}(\Omega)}$

④ Como $\Delta u_N = 0$ y $\Delta u_N \rightrightarrows \Delta u$ en U (pues $\Delta u_N = \partial^2/\partial x^2\, u_N + \partial^2/\partial y^2\, u_N$ $\wedge$ $\partial^2/\partial x^2\, u_N \rightrightarrows \partial^2/\partial x^2\, u$, $\partial^2/\partial y^2\, u_N \rightrightarrows \partial^2/\partial y^2\, u$),

luego $\underbrace{\Delta u_N(x_0, y_0)}_{=0} \to \Delta u(x_0, y_0)$, con lo cual $\boxed{\Delta u(x_0, y_0) = 0}$

$\forall (x_0, y_0) \in \Omega. \Rightarrow$ u cumple Ⓐ. (HIPÓTESIS USADAS: $f \in C^{0}[0, \pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0 \wedge f' \in G[0, \pi]$)

Resumen:

$\boxed{\text{EDP + BORDE}}$ $\xrightarrow{}$ (Sep. var) $\boxed{\text{Serie: candidato a solución}}$ $\xrightarrow{}$ (S. Fourier) (Criterios generales) $\boxed{\text{Solución}}$